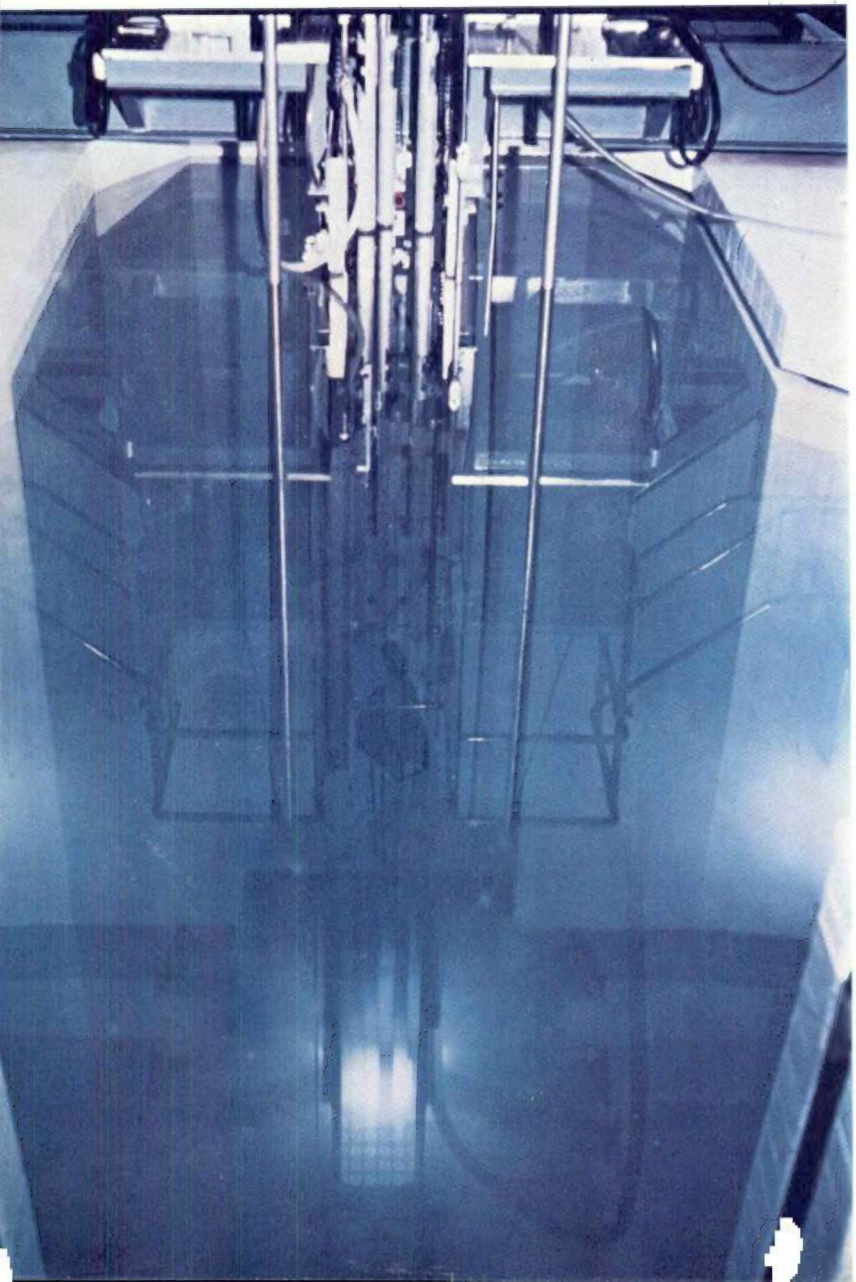
técnica



associação dos estudantes
do instituto superior técnico
revista de engenharia
abril 1971

407

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40 («Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA

Ra = 2400 kg/cm²

e

Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE

TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

AUTO-LUSITANIA

ALFREDO DUARTE L^da

AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

10.000 obras realizadas

- coberturas
- perfis especiais
- vigas pré-esforçadas
- pavimento trief
- protecção de segurança
- mosaicos
- tubos

materiais novobra

PAVIMENTOS

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADOS (HOMOLOGADOS PELO LAB. NAC. DE ENGENHARIA CIVIL)

LEIRIA — PONTE DAS MESTRAS — TEL. 2 27 88

LISBOA — AV. EST. UNIDOS DA AMERICA, 100, 5.º, Dto. — TEL. 77 16 83 - 77 46 20

LAGOA — ESTRADA DO CARMO — TEL. 94

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 407 ABRIL DE 1971 ANO XLVI VOLUME XXXIII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

Silvério de Sousa Mendes

Administrador

Vladimiro de Oliveira

Secretário

Raul Pereira da Costa

Chefe de Redacção

Guilherme Silva Arroz

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Antonio Mouraz
Francisco Toco Emílio
José de Oliveira Paulo
Rui Lopes dos Santos

Assinaturas

		5 Nos.	10 Nos.
Continente e Ilhas	—	85$00	160$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	95$00	170$00
Estrangeiro	—		180$00

Número avulso — 25$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

347 *DELGADO DOMINGOS* — **Recirculating flows.**
Escoamentos de recirculação.

357 *S. D. ANTUNES* — **An introduction to hot wire anemometry.**
Introdução ao estudo do anemómetro de fio quente.

367 *DUARTE-RAMOS* — **Sobre o critério Liapunov na teoria da estabilidade de sistemas.**
Liapunov Criterion on Stability of Systems.

381 *MARANHA DAS NEVES* — **Influência das tensões neutras negativas nas características estruturais dos solos compactados.**
The influence of negative neutral stresses of the structural characteristics of compacted soils.

391 *ARTUR RAVARA, MADALENA QUIRINO, M. TERESA PEREIRA DA SILVA* — **Análise de estruturas redutíveis a osciladores não lineares com histerese.**
Dynamic analysis of non linear hysteretic systems.

403 *HENRIQUE PEREIRA* — **Aplicações da geoestatística.**
Geostatistic Applications.

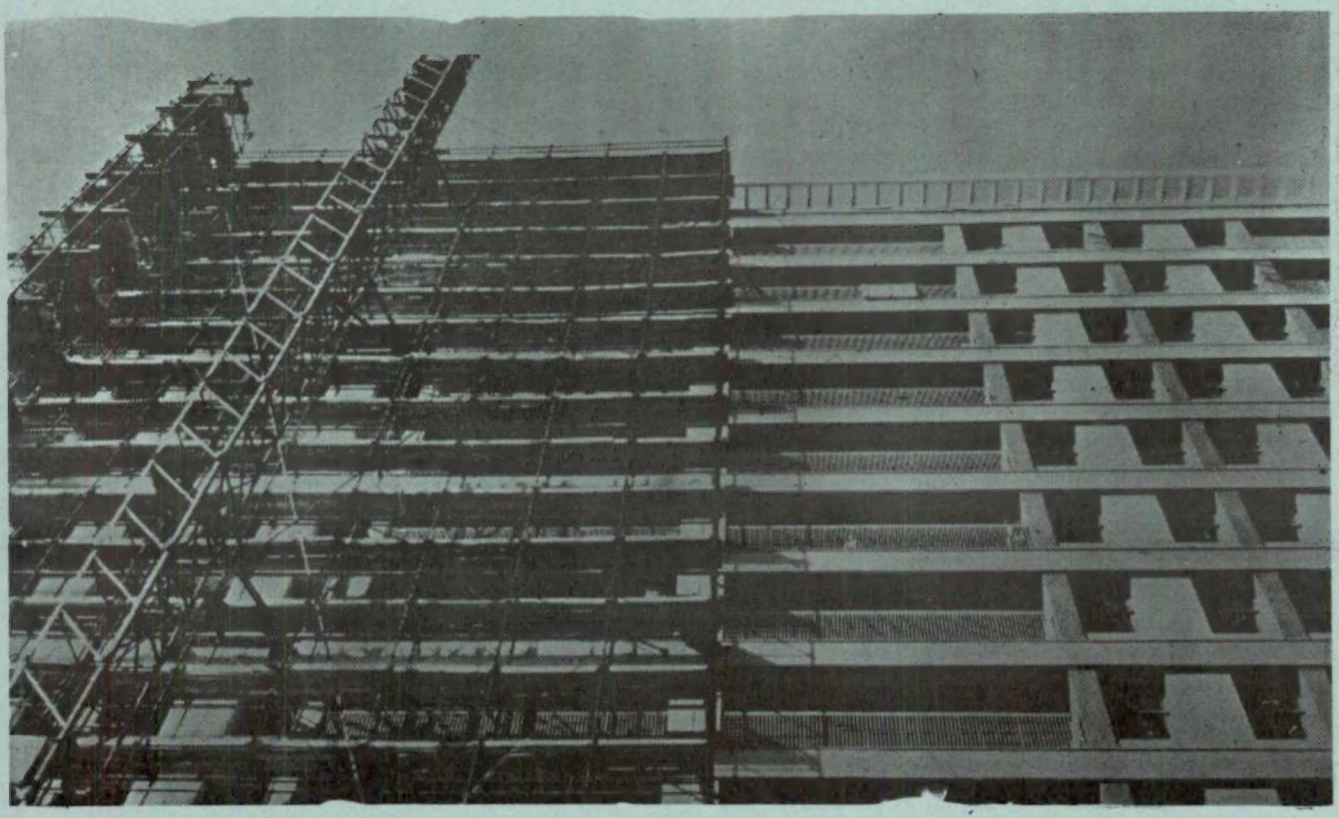
419 **Bibliografia**

CAPA : Reactor Nuclear mostrando o efeito CERENKOV — L.F.E.N.

INDICE ALFABETICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXIII
Aguiar & Melo, Lda.	XXIX
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	X
Empresa Electro Cerâmica	XIV
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Frapil	XII
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	V e VIII
Harker Sumner	XXVI
Heliaço	2.ª da capa
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	V
J. F. Azevedo e Silva	VII
J. Roma	IV
Jomatel	XIV
Livros Técnicos	IV e XXV
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida	XXI
Mobil Oil	XVIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Rotring	XXVIII
Siemens	4.ª da capa
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
S. K. F. Lda.	XXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	V
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
Time-Sharing	X
Tudor	XXIII
Wild Portugal, Lda.	III

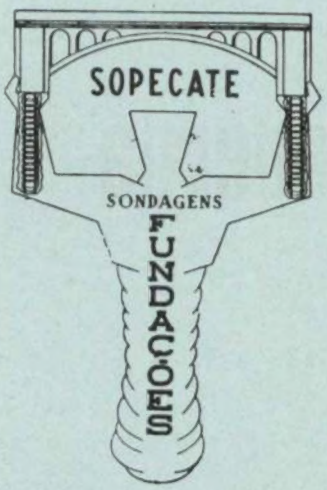
na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

FRANKI

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

- ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA
- SONDAGENS GEOLÓGICAS
- REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS
- FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS + POSTOS + ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Temos apenas uma qualidade:
Primeira.
WILD
HEERBRUGG
SWISS
Os estojos de desenho WILD são confeccionados de aço crómio polido inoxidável.
Isto significa precisão, mesmo após uso de longos anos.
Um exemplo da mais alta perfeição: O traçado direito e preciso do compasso WILD. O mesmo possibilita um trabalho seguro. A posição do ângulo pode ser fixada com rapidez e segurança sem a mínima folga nas pernas do compasso.
A aplicação de materiais sòmente da melhor qualidade e o máximo cuidado no acabamento, justificam a reputação mundial de primeira qualidade, Made in Heerbrugg.
WILD
HEERBRUGG
Aparelhos para Fotogrametria
Aparelhos topográficos
Microscópios

Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
— Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
a) com armadura de compressão reduzida
b) com armadura de tracção reduzida
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Compressão simples
— Flexão composta de secções rectangulares
a) com armadura simétrica
b) com armadura de tracção reduzida
c) com armadura de compressão reduzida
— Flexão composta desviada de secções rectangulares
— Flexão composta de secções em T
a) com armadura de tracção reduzida
b) comarmadura de compressão reduzida
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
— Esforço transverso

Preço 150$00

Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

Matérias

— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

Preço 60$00

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO

Aparelhagem de medidas eléctricas

✦ indicadora
✦ reguladora
✦ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151
P. do Município, 309-6.º S/3 PORTO Tel. 0236732

aeist secção de folhas

TRABALHOS ESCOLARES, TESES, RELATÓRIOS, LIVROS DE CURSO, LIVROS TÉCNICOS
IMPRESSÃO EM OFF-SET E STENCIL

Telefone 763351

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

— ENTREGAS IMEDIATAS

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO
GUEDES & ALMEIDA, LDA.
RUA ÁUREA, 181 - 2.° — TELEFONES 32 50 11 - 32 78 45 — LISBOA

SONDAGENS RODIO, LDA.

R. S. Bento, 644 - 3.°
LISBOA

PORTO
LUANDA
BEIRA

TELEFONE: 68 80 96

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ESTACAS
PAREDES CONTÍNUAS
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa

No Norte: **SCIAL** — R. António Feliciano de Castilho, 1126 — Telef. 97 09 32 — Areosa — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS

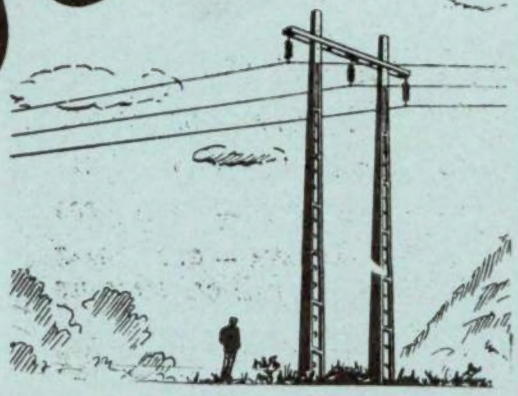
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA

MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA

Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

JF

Teve o prazer de colaborar nos trabalhos de montagem das novas instalações da

COMPANHIA NACIONAL DE FIAÇÃO E TECIDOS DE TORRES NOVAS S.A.R.L.

Executando a **instalação eléctrica** e fornecendo todos os materiais de iluminação.

OY NOKIA AB	DURO TEST	MA INTERLIGHT Merchant Adventurers Limited
Calha eletrificada trifásica	Lâmpadas fluorescentes OPTIMA Lâmpadas refletoras SUPER BRANCO	Armaduras para aplicação em calhas electrificadas

JF Fabricou nas suas oficinas diversas armaduras de iluminação e quadro eléctrico de paineis.

DIVISÃO DE ILUMINAÇÃO ESPECIAL

JF

J.F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª LDA

Trv. Fábrica das Sedas, 22-A • Tel. 653711-654165 • LISBOA

WABCO
An American-Standard Company

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADES ATÉ 34 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

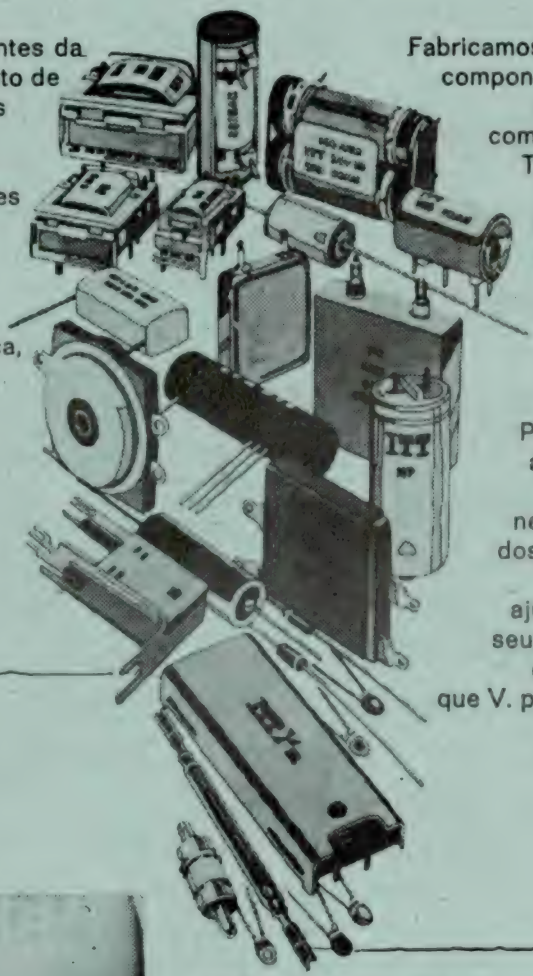
GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

Se ainda não encontrou o componente que precisa... ... nós temo-lo para si!

71-B

O "Grupo de Componentes da ITT Europa" é um conjunto de Empresas especializadas no desenvolvimento, fabrico e venda de componentes electrónicos.
Na Europa Ocidental contamos com 4 modernos centros de investigação científica, 56 unidades fabris e 38 escritórios principais de vendas.



Fabricamos uma vastíssima gama de componentes electrónicos: desde a simples resistência aos complicados cinescópios para TV a cores; de minúsculos termistores a enormes klistrões; semicondutores, circuitos integrados, L.S.I., válvulas electrónicas, cristais de quartzo e filtros, relés, microfones, motores, fios, cabos e ligadores.
Pelo facto de pertencermos ao grupo ITT temos acesso ao conhecimento das necessidades e solicitações dos mais diversos mercados.
A experiência adquirida ajuda-nos pois a resolver os seus problemas e permite-nos oferecer-lhe o componente que V. precisa no momento exacto.

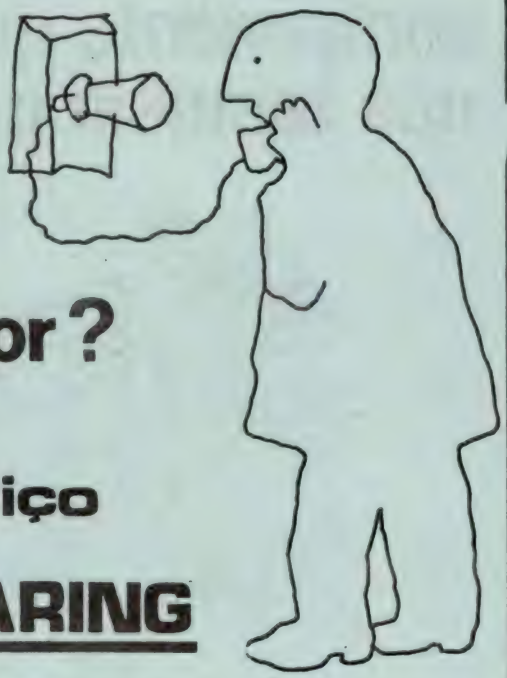
Exemplos de componentes ITT
são estes condensadores miniatura largamente utilizados pelos fabricantes de receptores de rádio e TV.
Utilizam essencialmente tântalo sólido, material normalmente reservado para componentes empregados em equipamentos profissionais.
Diâmetros de 3, 5 a 7,5 mml
Tensões de 6 a 35 V
Capacidades de 0,1 a 50 microfarads

Para informações completas dirija-se a:
STANDARD ELÉCTRICA, S. A. R. L.
Divisão ITT de Vendas de Componentes
Av. da República, 60, 2.º-D.
Lisboa 1
Telef. 76 54 91

COMPONENTES

ITT

será possivel telefonar a um computador?



sim... com o serviço

TIME-SHARING

BASTARÁ DISPOR DE:

- UM TERMINAL
- UM TELEFONE
- UMA TOMADA

E TERÁ AO SEU DISPOR, INSTANTÂNEAMENTE, A ENORME POTÊNCIA DE UM GRANDE COMPUTADOR

Logo que, pelo telefone, se estabelecer ligação com o Centro de Time-Sharing, o utilizador pode iniciar o diálogo com o computador, através do teclado do terminal. Qualquer pessoa pode servir-se do TIME-SHARING, mesmo que não tenha a menor noção do que é programar. A linguagem utilizada — o BASIC — aprende-se em escassas horas.

ALGUMAS APLICAÇÕES DO TIME-SHARING: análise de investimentos (cash-flow), análise de regressão, P. E. R. T., programação linear, resolução de equações diferenciais, cálculo de estruturas, cálculo de latitudes, distribuição, estudos de mercado, estudo de circuitos eléctricos, composição de tintas, ensino programado, etc., etc.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE COMPUTADORES EM TEMPO DIVIDIDO

(TIME-SHARING), SARL.

Avenida 5 de Outubro, 95-3.º, -Telef. 769551

Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

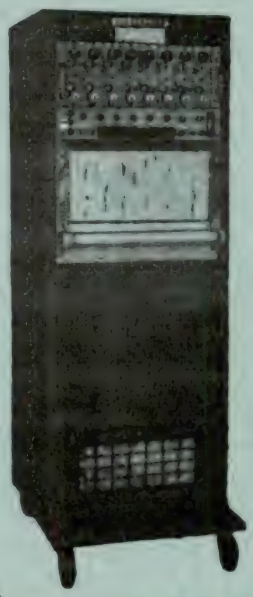
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

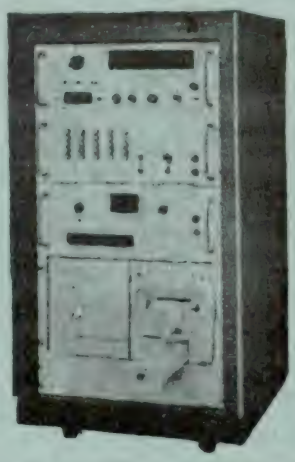
aparelhagem electrónica de medida e registo

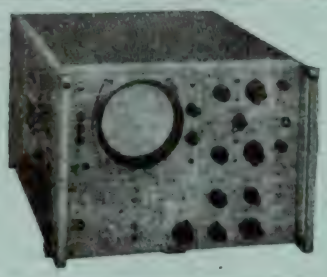
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador Sanborn



Registador digital Dymec





Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

à medida do tempo criamos para si...o tempo das medidas eléctricas

FRAPIL impõe-se hoje como a técnica que satisfará as suas exigências, oferecendo-lhe uma gama completa de aparelhos de medidas eléctricas duma qualidade insuperável, duma simplicidade de emprego inegualada, severamente controlados em todas as etapes do seu fabrico, concebidos e executados para satisfazer a cada uma das suas necessidades.
Para si, que acompanha o progresso, criamos um aparelho contemporâneo do futuro

APARELHOS DE MEDIDAS ELÉCTRICAS **FRAPIL**

012.06.5613

técnica

NUMERO 407 ABRIL DE 1971 ANO XLVI VOLUME XXXIII PUBLICAÇAO MENSAL

U. D. C. 532.5 - 4 + 532.54

III — RECIRCULATING FLOWS

by J. J. D. DOMINGOS
Professor of Mechanical Engineering
Division of Applied Thermodynamics
Instituto Superior Técnico,
LISBON

RESUMO

Discutem-se os escoamentos bidimensionais em que as aproximações de camada limite não são válidas, e os aspectos matemáticos e físicos do problema. As dificuldades intrínsecas do tratamento numérico das equações são exemplificadas, mostrando-se que o aumento do número de Reynolds conduz a exigências contraditórias no que se refere a precisão e estabilidade.

Apresentam-se modelos de turbulência e a sua incorporação num método de cálculo aplicável a este tipo de escoamentos tal como desenvolvido por D. B. Spalding et al.

SYNOPSIS

Two dimensional flows where the boundary-layer approximations are not acceptable are introduced and their specific mathematical and physical problems discussed.

Inherent difficulties to the numerical treatment of the partial differential-equations are exemplified and it is shown how increasing the Reynolds number imposes contradictory requirements regarding stability and accuracy.

Turbulence models are introduced together with a numerical solution procedure appropriate to these type of flows, as developed by D. B. Spalding et al.

0 — INTRODUCTION

In part I [1] the general equations which form the actual basis for the study of turbulent incompressible flows were deduced and discussed. The combination of fundamental equations with empiricism or guess, which allowed the proposal of turbulence models to be applicable in prediction methods of boundary-layer flows, were the object of a detailed discussion in part II [2], together with the assessment of their practical utility.

Boundary-layers are the particular class of two-dimensional flows where a dominant flow direction exists such that the momentum equation in the orthogonal direction can be neglected, with the consequence that the pressure is constant in each cross section of the flow. This simplification has fundamental implications at physical and mathematical levels. In fact, the steady-state Navier-Stokes equations which form a coupled set of elliptic equations reduce to parabolic. The parabolicity of the boundary-layer equations has the physical effect that downstream values of any quantity do not affect the upstream ones. From computation point of view this means that downstream values are obtained in a marching procedure from the upstream ones, starting from their given values at the initial station (initial condition) and on the boundaries (boundary conditions). (*)

Though acceptable in many circumstances, as experimental values show, the simplifications are not possible in many important situations where the full set of two-dimensional elliptic equations must be used if meaningful results are sought. Some typical examples of separated flows or recirculating flows are show on fig. 1. In many cases, it is possible to divide the flow field in regions of full two-dimensional flow and bounda-

(*) i.e. for velocity, usually a non-slip condition at the wall boundary and a finite value on the free stream are specified.

ry-layer type flow, as for example the impinging jet (Fig. 2) or the region of separated flow in a wall boundary-layer. (Fig. 1,d).

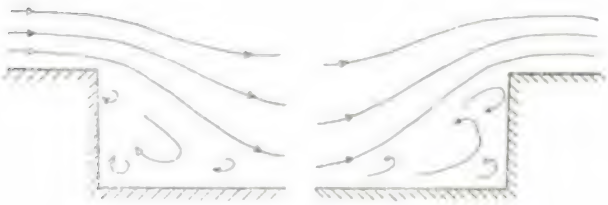


Fig. 1-a

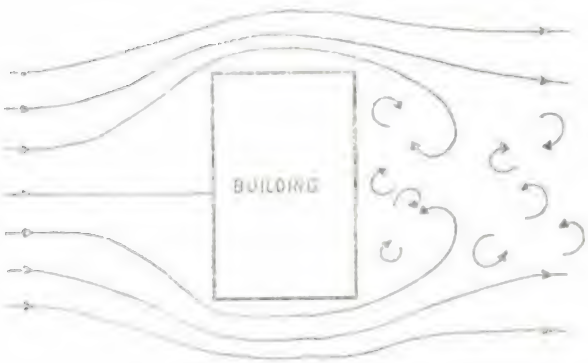


Fig. 1-b

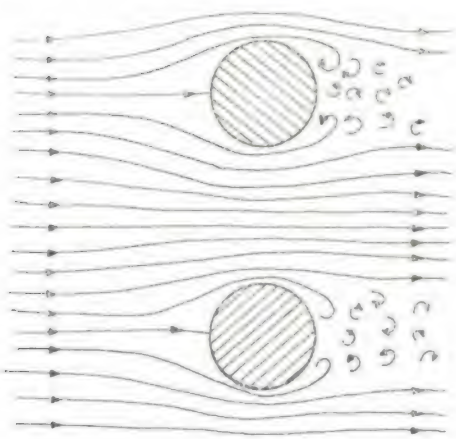


Fig. 1-c

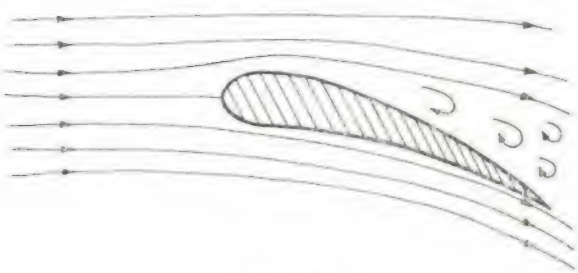


Fig. 1-d

Such expressions as boundary-layer, separated flow, recirculating flow, . . . are sometimes confusing regarding their precise meaning. Thus we will classify two dimensional flows, after D. B. Spalding, in parabolic and elliptic flows according to the type of equations able to predict them, keeping in mind that, in this respect, parabolic flows are a simplification of elliptic flows.

In this III part, elliptic flows will be considered only to stress present difficulties regarding their prediction, and to emphasize, by contrast, what simplifications were involved in parabolic flows. Detailed discussion regarding numerical solution procedures will not be attempted because it would take us too far out of the scope of the present course.

1 — THE MAIN EQUATIONS

The Navier-Stokes equations, for an incompressible fluid without body forces when the flow is two-dimensional and steady (I-15) * reduce to

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_1} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} \right] \tag{1}$$

$$V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_2} + \nu \left[\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} \right]$$

and the continuity equation to:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0 \tag{2}$$

These equations form a coupled set of quasi-linear elliptic equations, and we will call these flows elliptic flows (in the boundary-layer approximation $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = 0$ in the first equation and the second is reduced to $\frac{\partial P^*}{\partial x_2} = 0$ or $P^* = P^*(x_1)$;

* I-15 means expression 15 of part I; as a rule, I or II preceeding a number refer to expressions in part I or II.

because of the simplifications, the equation become parabolic).

If the flow is turbulent the equations are, for the mean values, in steady state, from (I-23)

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}\overline{u_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{u_1 u_2}\right]$$

$$U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu\left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1 u_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}\overline{u_2^2}\right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \quad (4)$$

2 — THE MATHEMATICAL PROBLEM

2.1. — Boundary conditions

As already refered, the fundamental equations in steady-state form a coupled set of quasi-linear elliptic equations, regardless of the flow beeing laminar or turbulent (*). The solution of this set implies the specification of the velocity or its derivatives on the whole boundary (**). As an initial value problem (Cauchy problem) the problem is not well posed as shown by Hadamard for the linear case.

The need to specify the unknown on the whole boundary has the physical meaning that the value in each point influences the values in all others (which is typical of elliptic problems). From a prediction point of view, it means that in many important situations a boundary value is to be specified at a location where we would like to use the equations to get it by calculation.

(*) In turbulent flow, we must stress, the instantaneous (time depend) equations are parabolic. They become elliptic only after the averaging process, and in the assumption of a steady mean flow — see appendix.

(**) Mathematically, specifying only the derivatives would only insure uniqueness within a constant.

As a simple example, which illustrates the practical difficulty, let us consider the flow in a tube. The elliptic nature of the problem imposes, for its solution, that an inlet and an outlet profile be specified, besides a null value on the tube wall. However, to specify the outlet profile is, in many cases, to specify what we would like to calculate.

From a practical point of view, we will try to avoid the difficulty, specifying the outlet profile far downstream from the cross section where the velocity is to be predicted, on the assumption taht, if the boundary is far enough downstream the values specified there would not affect the prediction. This is not true from the very nature of elliptic equations, so an error is always involved.

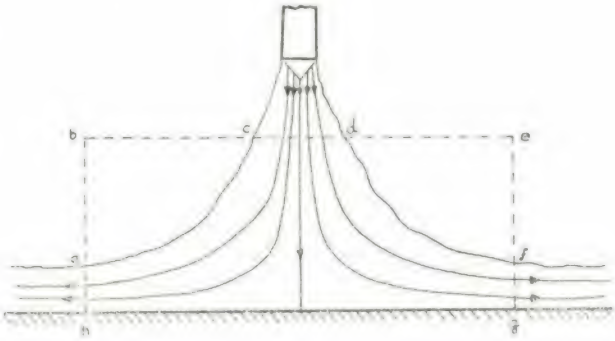


Fig. 2

Another example is the impinging jet (Fig. 2). The mathematical problem implies the specification of the unknown on the boundary. Though the pratical way would be to specify in abc, def the values from a potencial flow solution, in cd, fg and ha the values from a boundary layer solution, we easily realize that such a procedure can entail significant errors (*). Another typically simple situation is depicted in Fig. 3. Values of velocity are to be specified in AA and BB. Of course, if the square cavity repeats itself periodically, the assumption of an equal profile in AA and BB can be adopted and its value found by iteration, starting from a tentative profile.

The practical difficulty just mentioned for simple cases (where some remedies have also been devised) shows that even if the solution of the basic

(*) We omit reference to part of the boundary which coincides with a solid wall. There, the non slip condition is obvious.

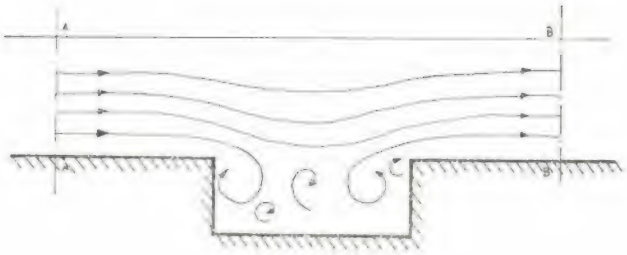


Fig. 3

equations were known, a better understanding regarding the way of specifying boundary conditions would be still necessary.

2.2 Numerical schemes

Assuming that we know how to specify the boundary values, we must still face the problem of solving numerically the set of equations. In this respect, a long way is to be followed before reliable and cheap procedures are found (despite many claims that these goals have already been achieved).

Regarding numerical procedures, known methods have not yet been able to overcome the difficulty of a predictable effect on accuracy--stability-computer time of increasing Reynolds number. To clarify the nature of this problem let us consider a simple example: the approximation of convective terms by finite differences. The example is based on a model equation and follows closely the discussion of Fromm [3].

Consider the equation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \qquad (5)$$

where w is any convected property (for example the vorticity), ν is a constant (diffusivity) and U is the fluid velocity which will be assumed constant for the sake of the example.

From a Taylor's series expansion around the point $x_1 = i\,\Delta x_1$, $t = n\,\Delta t$, we get:

$$w_{i-1}^n = w_i^n - \Delta x_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i^n + \frac{\Delta x_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)_i^n - \dots$$

$$w_i^{n+1} = w_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_i^n + \dots \qquad (6)$$

(where the subscript i represents the spatial coordinate and the superscript n the time where the derivatives are to be calculated)

And the left hand side of (5) is approximated by (*)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \simeq \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + U \frac{w_i^n - w_{i-1}^n}{\Delta x_1} + \frac{U \Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \qquad (7)$$

If we take the lowest order approximation, i. e. only the first two terms in the r. h. s. of (7) the error is

$$U \frac{\Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \dots$$

which shows that the approximation introduces an artificial diffusion of the above value.

If we now consider the right hand side of (5) we see, regarding the errors involved in its finite-difference approximation, that our finite-difference scheme is the analogue of a different equation which is

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} = \left(\nu + \frac{U \Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1} \right) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \dots \qquad (8)$$

though, the limit $\Delta x_1, \Delta t \to 0$ shows the finite--difference scheme to be consistent. Practically, $\Delta x_1, \Delta t$ are finite and unless $U \frac{\Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1} \right) << \nu$ we shall expect important errors in the calculation.

(*) on the assumption of $\nu \simeq 0$

Of course, we can choose $1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1} = 0$, but this is possible only in our simple example where U is constant.

In the general case U is not constant and can assume both positive and negative values. If w is the vorticity, and the equations are written in non-dimensional form, the non-dimensional diffusivity is 1/Re, so if Re increases, Δt and Δx_1 must decrease if accuracy is to be preserved. On the other hand, regarding stability, the total diffusion coefficient

$$\nu + \frac{U \Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1}\right)$$

must be positive. If not, the basic solution would diverge.

If this coefficient is approximately zero, we have the typical problem of hyperbolic equations which are usually stabilized by introducing an artificial viscosity.

Summing up: taking into account only the finite-difference approximation of the convective terms, an error is involved due to the finite-size of the mesh, i.e. Δx_1 Δt. This error produces the equivalent of a diffusion, with a diffusivity coefficient of value

$$\frac{U \Delta x_1}{2} \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x_1}\right)$$

In order to get accuracy, this coefficient must be small compared to the true physical diffusivity. This means that, with increasing Reynolds number the numerical diffusivity must be reduced to preserve accuracy. However, numerical stability imposes a finite positive viscosity, regardless of it being true physical viscosity or numerical. Because true physical viscosity becames vanishingly small with increasing Re, the only way out to stability is to accept numerical viscosity, at the price of a loss in accuracy.

Though very crude (**), the example shows the conflicting demands on the finite difference approximations of this type of equations: for stability, a finite, positive, viscosity must exist. If the physical viscosity ν is not large enough, an artificial viscosity is needed which in turn strongly affects the accuracy.

Because $\nu <> \frac{1}{Re}$ the strong influence of the Reynolds number in the computational problem is easily understood.

The above remarks apply equally well to laminar and turbulent flows, provided the turbulent viscosity or its equivalent is taken into account.

3. THE PHYSICAL PROBLEM IN TURBULENT FLOWS

The main mathematical difficulties have been briefly outlined, on the assumption that the Reynolds stresses are known. The law which these stresses must follow is the physical problem, which is far from being solved.

By reasons often refered, the computation of the Reynolds stresses from the N. S. equations seems presently an impossible task. In purely time dependent laminar flows the numerical stability is lost, well before the critical Reynolds number is attained, unless an artificial viscosity is introduced which renders meaningless the computed values. In turbulent flows, the mean flow equations are obtained by the procedure already discussed in part I, introducing the additional unknown of the Reynolds stresses. These are to be postulated in a way similar to that discussed in part II. In this case, however, the turbulence model is necessarily more complex. Taking, for instance, the production terms in the turbulent kinetic energy equation we have now four, instead of the two terms which appeared in the boundary-layer case.

Besides, in the boundary-layer case there are a considerable amount of experimental values to guide in the formulation of models or to test them when, in the elliptic case, data is very limited and unreliable.

Because the physical situation is more complex, more data is needed to account for the larger number of influencing parameters. These, in turn, render more difficult the empirical correlations and stresses the need for more refined theoretical models and computational procedures which would ease the need for experiment.

(**) At a first sigth the reader would consider this an artificial example of elliptic flows because the model equation is time dependent. In fact, because of non-linearity, the solution of the final algebraic system may be found by iteration. This iteration is the equivalent of a time dependent term, which justifies the model considered.

Before we present the example of a remarkable attempt in such direction, we mention two difficulties: present techniques of hot wire anemometry rely heavily, for its interpretation, on previous knowledge of the mean flow direction (and apply only in low turbulence levels). This means that (though reliable in boundary-layer flows) the basic theory of interpretation of hot wire signals must be revised to deal with elliptic flows (this is the subject of following lectures). Use of turbulence models, like a mixing length, which has been sucessful in many practical situations where a typical length exists (such as the distance from the wall) is hurt with the difficulty that in general elliptic flows no such typical geometric length is obvious, which renders adventurous to extrapolate results from boundary-layer flows.

As a conclusion, we can say that a tremendous need exists for experimental data which would inspire and test turbulence models, and that improved turbulence models are needed to guide experimentation.

4. A PREDICTION PROCEDURE

4.1. Having in mind the difficulties refered previously we would like to briefly present the approach of Spalding et al. [4] develloped at Imperial College to deal with the prediction of elliptic flows.

We will refer mainly to the thesis work of Wolfsthein [5] because the theoretical predictions were partially compared with experimental values by Russel in Manchester.

Assuming a Boussinesq form, the Reynolds stresses

$$R_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} \qquad (i,j = 1,2)$$

$$R_{ij} = -\mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{9}$$

and introducing an effective viscosity

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \, (*)$$

* Obviously if $\mu_t = 0$, all the expressions apply to laminar flows.

The basic equations (3) can be written in the form:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial V^2}{\partial x_1} - \rho U_2 w + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu_{eff} \left(2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - w \right) \right] \tag{10}$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial V^2}{\partial x_2} + \rho U_1 w + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu_{eff} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu_{eff} \left(2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + w \right) \right]$$

where

$$w = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \tag{11}$$

is the vorticity, and

$$V^2 = U_1^2 + U_2^2 \tag{12}$$

is the velocity squared.

Taking the derivative of equation (10) in x_1 and subtracting the second after derivation in x_2 the pressure term can be eliminated, and equations (10) are transformed into:

$$\rho U_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \rho U_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_i} (\mu_{eff} \, w) + S_w \tag{13}$$

where

$$S_w = 2 \left(2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial x_2^2} \right) \tag{14}$$

Introducing now the stream function:

$$\Psi = \int \rho U_1 \, dx_2 - \int \rho U_2 \, d x_1 \tag{15}$$

The continuity equation (4) is transformed into

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \, dx_j} = -\rho w \qquad (16)$$

Equations (13) and (16) are the two fundamental equations which determine the two unknowns: w and Ψ.

After w and Ψ are known, U_1 and U_2 are found from (11) and (15) and the pressure P from (10).

The basic equations (13), and (16) are of the elliptic type. As already refered, its solution imposes a specification of the unknown or its derivatives on the whole boundary. On any surface, S

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_s = f(P) \; (*) \qquad (17)$$

is the boundary condition for Ψ.

For w we get, from the continuity equation

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}\right)_s = -\rho w_s \; (**) \qquad (18)$$

If S coincides with an impervious wall (non slip and zero normal component of velocity) equation (17) reduces to

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_w = 0 \quad \text{or} \quad \Psi_w = \text{const.}$$

Remark that the boundary conditions are coupled what can give rise to some additional numerical difficulties.

4.2. For the numerical solution, the equations are put into finite difference form which are derived from the integration around the given point and assuming a linear variation of the unknowns in the domain — the original reference [4] must be consulted for details.

The non-linear, algebraic set of equations which has to be solved can also be obtained througth formal finite difference techniques using uncentered differences. The use of uncentred differences (which the authors justify on physical grounds: a point in the field is more strongly affected by values upstream than downstream) allows the stabilization of the numerical scheme, though the formal proof of such range of convergence is not known. As should be expected, from our previous example, the scheme introduces an artificial viscosity which gives rise to numerical diffusion [6] (*).

However, provided the limitations are clearly understood, the method is very interesting and usefull.

4.3. In turbulent flows, the Reynolds stresses are found using the assumption that all the quantities which appear in the turbulent-kinetic--energy-equation are expressible in terms of the turbulent-kinetic-energy ($k \equiv \overline{q^2}$) and a length--scale.

By dimensional analysis [5], the following expressions are found:

Viscous dissipation:

$$\mu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} = C_D \frac{k^{3/2}}{l_D} \qquad (19)$$

Diffusion:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{1}{2} u_i^2 u_j - p u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \qquad (20)$$

Reynolds stresses:

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \qquad (21)$$

with μ_t found using the Prandtl-Kolmogorov assumption:

$$\mu_t = c_\mu \rho k^{1/2} l_\mu \qquad (22)$$

with these assumptions, the turbulent-kinetic--energy equation becomes

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \right. \qquad (23)$$

$$\left. -\nu_t \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + C_D \frac{k^{3/2}}{l_D}\right\} = 0$$

(*) $f(P) \equiv \left(\rho U_2 \frac{dx_2}{dn} - \rho U_2 \frac{dx_1}{dn}\right)_s$ from (15). Ψ is defined within an arbitrary constant as is well known.

Relation (17) implies, of course, that U_1 and U_2 are specified on S.

(**) This relation is just a consequence of (16) with x_j taken along the normal to S. As such, is a general relation which applies in any surface. This gives the general boundary condition for w. Besides, if the velocity profile is given along S, this defines Ψ_s from (15) within an arbitrary constant. Ψ_s is the boundary condition for Ψ.

(*) Which, we think, explains its stability.

After Spalding, if the Reynolds number of turbulence defined by $R_t = \frac{k^{1/2} y}{\nu}$ is very high, the length scales l_D, l_μ are related to y (distance to the wall) by

$$\frac{l_\mu}{y} = \frac{l_D}{\mu} \simeq \text{const} \simeq 1 \qquad (24)$$

which are asymptotic forms of

$$\frac{l_\mu}{y} = 1 - \exp\,(-A_\mu \,.\, R_t)$$

$$\frac{l_D}{y} = 1 - \exp\,(-A_D \,.\, R_t) \qquad (25)$$

On the above forms, all the expressions which define the turbulence model depend only on unknown constants which are hopefully universal and can be found by experiment.

Such a first tentative set has been proposed by Wolfshtein as:

$$A_\mu = 0.016\ ;\ A_D = 0.263\ ;\ C_\mu = 0.22\ ;$$
$$C_D = 0.416\ ;\ \sigma_k = 1.53$$

The scarcity of experimental data does not allow a full comparaison between predicted and measured values, so a final judgement is impossible. However, for the impinging jet, Russel has tested the predictions of Wolfshtein and the results are remarkably good if proper account is taken, both of the complexities of the model and of experimental verification. As a rule, mean velocity profiles are fairly-well predicted; turbulence-kinetic energy profiles show, sometimes, opposite trends.

Consideration of geometries other than the impinging jet are crucial for the test of «universality» of the constants once they have been found from the impinging jet data.

4.4 The above model still have a strong practical limitation because the parameter y is sometimes of dubious specification.

To avoid this difficulty, Spalding proposed an improved model where the length scale is got through an additional differential equation.

Spalding introduces a new unknown, the mean turbulent vorticity squared:

$$\Omega = \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2}$$

and a new equation to be verified:

$$U_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}\right] +$$
$$+ C_1 \nu_t \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2 + C_3 w^2 \sqrt{\Omega} - C_2 \Omega^{3/2}$$

This equation is proposed, not deduced. Together with the additional assumption

$$l = \sqrt{\frac{k}{\Omega}}$$

results

$$c_\mu = a_\mu\,[1 - \exp\,(-A_\mu R_t)\,]$$

$$c_D = a_D\,[1 - \exp\,(-A_D R_t)\,]$$

$$R_t = \frac{k^{1/2} l}{\nu}$$

with the values for the constants

$$\sigma_k = 2{,}3\ ;\ a_\mu = 0.227\ :\ A_\mu = 0.016\ ;\ \sigma_\Omega = 1$$

$$a_D = 0.416\,;\ A_D = 0.263\,;\ C_1 = 2\,;\ C_2 = 1\,;\ C_3 = 1$$

The constants are suposed universal. The above values must be considered tentative.

The new model was tested in boundary-layer flows with promising results.

5. CONCLUSION

Compared with boundary-layer flows, elliptic flows embrace a much wider class of important practical problems. However, their complexities are much greater and their sucessful understanding and prediction have to overcome experimental, physical and mathematical difficulties. Some of them were refered.

Tentative turbulence models and a numerical scheme able to reasonably predict known experimental data already exist, but extensive development is still needed.

AKNOWLEDGEMENTS

Helpful comments and criticisms of the text from M. Nina and C. Filipe both of the Applied Thermodynamics Division of I. S. T. are greatefully aknowledged.

This work is part of a Research project financially supported by Instituto de Alta Cultura, and a NATO Research Grant.

CASAS E ESTRUTURAS PRÉ-FABRICADAS MAGUE

para todos os fins

AO SERVIÇO DA AGRICULTURA

Instalações Industriais e Agrícolas, Escolas, Ginásios, Habitações, Aquartelamentos, Hospitais, Serviços Sociais, Armazens, Garagens etc.

CONSTRUÇÕES METALOMECÂNICAS MAGUE SARL

ALVERCA DO RIBATEJO – PORTUGAL

TELEFONES 258601 / 684 / 706 / 840 / 841 / 885

A utilização de betão pronto impôs-se
ao dono da obra,
ao técnico responsável
e ao empreiteiro
porque garante qualidade,
rapidez e economia
em relação
a um betão fabricado em estaleiro.

Consulte-nos.

Os nossos serviços técnicos
e comerciais
terão o maior prazer em prestar
todo o apoio
e colaboração
que nos forem solicitados.

UMA NOVA MARCA DE BETÃO PRONTO

JOMATEL

TECNICA XIV

APPENDIX

Classification of Navier-Stokes equations and their simplified forms.

Because contradictory statements appear in the literature regarding the classification of the N. S. equations it seems useful to add a short note on the subject.

A formal proof of the type (*) being out of the scope of this course, we restrict ourself to one of the momentum-equations in the incompressible case (which is of second order) as follows:

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$$

If, for the moment, we assume that $\frac{\partial P}{\partial x_i}$, whenelimi-nated throught the continuity equation does not introduce second order derivatives in x_j, equation (a) is of the parabolic type in t because *all* the spacial coordinates appear in second order derivatives with the same sign and the time t only appears in a first order derivative whose coefficient has the opposite sign to the one of $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

In this case, the solution is obtained marching in time i. e., «what happens in the future does not affect the past».

Equation (a) is the model of the full, time-dependent, incompressible, N.S. equations which are parabolic.

If the motion is steady, $\frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$ and (a) reduces to

$$\text{(b)} \quad V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$$

In this case, all the independent variables appear in second order derivatives with coefficients of the same sign: the equation is elliptic. We remark that, if we introduce a time average in (a) such that $\overline{\frac{\partial V_i}{\partial t}} = 0$ we get the same conclusion.

If we now consider the boundary-layer approximation of (a), the second order derivatives in x_1 are dropped and (a) reduces to

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$$

(*) We recall that the classification of partial diffential equations is based on the higher order derivatives which apper in each independent variable.

In this approximation, only x_2 appears in second order derivatives, and t and x_1 only in the first order ones.

Equation (c) is parabolic in the broad sense.

In steady state, $\frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$ and we have

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad \text{(d)}$$

and the equation is parabolic in x_1 in the restricted sense or simply parabolic (the physical meaning of the equation implies $V_1 > 0$ which is also needed if equation (d) is to have a bounded solution).

Because (d) is parabolic in x_1, which is a space coordinate, the implication is that downstream values do not affect upstream ones (cf. with the role of time in equation (a)).

In the general, compressible case, elimination of P throught the continuity equation can introduce higher order derivatives whose coefficients can change sign, and accordingly the equations can change type. A formal and complete discussion of this topic is not known to us in the general case of viscous flows. In inviscid flows, the equations change to hyperbolic at super-sonic velocities, being of mixed type on the sonic-transition.

NOMENCLATURE

A, C — constants
k — turbulent kinetic energy
l — length scale
P — pressure
U_i — mean velocity component in direction i
u_i — fluctuating velocity component in direction i
V_i — velocity component in direction i
w — vorticity
x_1, x_i — orthogonal coordinates
y — distance to the wall
μ — dynamic viscosity
μ_t — turbulent dynamic viscosity
ν — kinematic viscosity
ν_t — turbulent kinematic viscosity
ρ — specific mass
σ_k — constant
S — boundary
Ψ — stream function
Ω — turbulent vorticity squared (mean)

Obs: — an overbar means always a time average

REFERENCES

[1] — J. J. D. DOMINGOS—The fundamental equations of turbulent incompressible flows, Tecnica 406, p. 287, 1971.

[2] — J. H. WHITELAW — Prediction procedures for two-dimensional boundary-layer flows: equations and assumptions, Técnica 406, p. 299, 1971.

[3] — J. E. FROMM — Practical Investigation of Convective Difference Approximations of Reduced Dispersion.
The Physics of Fluids Supplement II, II-3, 1969.

[4] — A. D. GOSMAN, W. M. PUN, A. K. RUNCHAL, D B. SPALDING and M. WOLFSHTEIN — Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows — Academic Press, 1969.

[5] — M. WOLFSHTEIN — Convection processes in turbulent impinging– jets Imperial College of Science and Technology — Department of Mechanical Engineering — Report SF/R/2.

[6] — A. K. RUNCHAL, D. B. SPALDING, M. WOLFSHTEIN — Numerical solution of the elliptic equations for transport of vorticity, heat and matter in two-dimensional flow — The Physics of Fluids — Supplement II, II 21-1969.

FEIRAS, CONFERÊNCIAS, EXPOSIÇÕES E CURSOS, NO MUNDO

OBJECTIVO E PROGRAMA	LOCAL, DATAS, ORGANIZAÇÃO, INFORMAÇÕES
8èmes Journées Européennes de la Commission Internationale des Irrigations et du Drainage	Aix-En-Provence, 14-19 Junho-71 Secrétariat de L'A.F.E.I.D. 19, Av. du Maine, 75-Paris, 15, França
Recherches Européennes Sur La Résistance a L'incendie des Constructons Métaliques (Do Ciclo do ITBTP)	Paris, 15 Junho-71 ITBTP 9, Rue la Perouse, Paris 16
Técnicas de Entrevista	Lisboa, 16-18 Junho-71 INII
4ème Conference Internationale sur la Physique des Plasmas et la Recherche Concernant la Fusion Nucléaire Controlée	Madison, Wis., 17-23 Junho-71
Achema 71 — 17.º Congresso e Exposição de Aparelhagem Química	Frankfurt, 17-24 Junho-71 Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã
Small Gas Turbines for Helicopters and Surface Transport	Paris, 21-22 Junho-71 Londres, 24-25 Junho-71 Montreal, 28-29 Junho-71 Pasadena, 1-2 Julho-71 Direcção do Serviço de Materiais da Força Aérea Portuguesa
IMEBORON — International Meeting in Boron Compounds	Castle Libice, 21-25 Junho-71 Institute of Inorganic Synthesis, Czechoslovak Academy of Sciences, Rez Near, Prague, Czechoslovak
VII Assembleia Geral do CIB e V Congresso do CIB	Paris, 21-30 Junho-71 CIB — Postbus 299-Weena 700, Rotterdam, Holanda

U. D. C. 551.508.5 : 53.089

IV — AN INTRODUCTION TO HOT WIRE ANEMOMETRY

by S. D. ANTUNES
Dept. of Mechanical Engineering
Division of Applied Thermodynamics
Instituto Superior Técnico
Lisboa

RESUMO

Justifica-se o uso de fios quentes em anemometria, em particular descreve-se o método de calibração destes, e interpreta-se a resposta do anemómetro de fio quente em escoamentos de baixa turbulência.

SYNOPSIS

This paper provides an introduction to the physics of hot wire anemometry. The use of wires as transducers for turbulence measurements is justified, and for flows with low turbulence the means of signal interpretation is discussed.

Techniques of calibration are also described. In particular, the constant temperature (constant resistance) and constant current hot wire anemometers are presented, and their uses are commented on.

1. INTRODUCTION

1.1 — In fluid dynamics, measurements are needed in order:

a — to satisfy the requirements for further data resulting from the study of complicated flow situations. Generally, one starts with measurements assuming simple models for the flow, and then these models may be developed in such a way as to represent better the situation under study;

b — to provide confirmation of theoretical models. In this case, the scientist has to reproduce the assumptions of the theory, and the measurements will become much harder.

1.2 — In the flow of fluids, the velocity at each point may be assumed to be the sum of two components, one being the time mean velocity and the other being the fluctuating velocity whose time mean value is zero. Choosing a coordinate system (O, x_1, x_2, x_3) as indicated in figure 1. The instantaneous velocity at point O is then considered as the vectorial sum of the time mean velocity (U_1, U_2, U_3) and the fluctuating velocity (u_1, u_2, u_3).

1.3 — If the fluid flow is turbulent, the components of the vector (u_1, u_2, u_3) are randomly distributed. When using statistical theories, turbulent flow is treated as an ergodic phenomenon, i. e. one assumes that time averages and ensemble averages are equal.

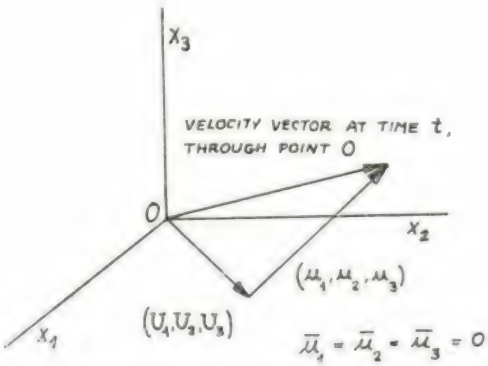


Figure 1 – Components of velocity relative to the coordinate system (O, X_1, X_2, X_3)

1.4 — The study of turbulence as random phenomenon requires the use of transducers sensitive to the fluctuating component of velocity. The hot wire anemometer is one of the transducers we may use to detect the fluctuating velocity in the flow. Other techniques do, however exist for making turbulence measurements, and in the lessons of this course, F. Durst provided also some information about laser Doppler-shift anemometry applied to turbulence measurements.

1.5 — The information obtained from hot wire anemometer measurement can be processed to provide:

a. — correlation measurements, in particular the components of the tensor $\overline{u_i u_j}$ introduced in the lessons of Prof. D. Domingos;

b. — spectrum analysis and power spectral density of the kinetic energy;

c. — r.m.s. turbulence intensity (*); and

d. — the degree of isotropy and homogeneity of the turbulence field.

2. THE USE OF WIRES AS TRANSDUCERS

2.1 — The application of wires as transducers depends on the detection of the fluctuations in electrical resistance of the wires. The electrica resistance of a conductor depends on its dimensions and temperature, and the resistivity of the material. Table 1 lists those factors and names the coefficients used to specify the influence of the corresponding factor on the resistance. Table 2 shows the applications of resistance transducers corresponding to the factors on which the resistance depends.

2.2 — The use of wires as anemometer transducers is based on the relation between convection coefficients and the velocity of the fluid flowing around the wire. In hot wire anemometry, we use wires under conditions such that the resistance of the wire depends mainly on its temperature and thus on the heat transferred from or to the fluid by convection.

The material of the wires used in anemometry should be such that:

a. — it has a high temperature coefficient of resistance;

b. — it does not become oxidised easily when heated to high temperatures; and

c. — it is possible to manufacture small diameter wires whose characteristics are uniform along their length.

2.3 — Table 3 records values of the temperature coefficient of resistance for some materials. Of these materials, the most commonly used in anemometry are tungsten and platinum. In spite of the temperature coefficient of resistance of copper being of the order of those of tungsten and platinum, copper is not used because it becomes oxidised even at low temperatures.

3. HEAT TRANSFER FROM A HOT WIRE

3.1 — Let us consider an infinite wire, heated by the Joule effect, and let us suppose that heat transfer from the wire to the fluid exists by convection only. Due to the cylindrical symmetry of the system, it is obvious that the temperature of the wire should only depend on the component of the flow normal to the wire.

3.2 — An energy balance applied to a control volume containing the hot wire gives:

$$Q_J + Q_T = Q_a + Q_s + Q_h + Q_r, \quad (4)$$

where:

Q_J = heat generated by Joule effect

Q_T = heat generated by Thomsom effect (due to the existence of temperature gradients in the wire). This term is of the type:

$$Q_T = \sigma_T \cdot I \cdot \frac{dT}{dx}, \quad (5)$$

where σ_T is a constant. However this term is so small compared with Q_J that it may be neglected.

Q_a = heat absorbed by the wire to change its temperature. It depends on the temperature variation of the fluid as a function of time, and is important only when using the hot-wire in non-stationary conditions.

Q_s = heat conducted along the wire to the hot wire supports. Hot wire probes cannot be manufactured with infinite wires since they have to be supported. Also we need to make local

(*) — the r.m.s. (root mean square) value of a function V (t) is defined as:

$$\sigma = \left(\overline{V^2(t)}\right)^{1/2} = \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V^2(t)\, dt\right)^{1/2}. \quad (1)$$

In practice, for the purposes of measurement, the r.m.s value is calculated as:

$$\sigma_{meas} = \left(\overline{V^2_{meas}(t)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} V^2(t)\, dt\right)^{1/2}, \quad (2)$$

where T_1 may be chosen sufficiently large that σ_{meas} is practically constant in time, and then:

$$\sigma \simeq \sigma_{meas}. \quad (3)$$

measurements, and so the wires must be short (up to about 2 mm). Thus instead of constant temperature along the wire, the temperatures at the extremities of the wire are the same as the temperatures of the supports (see figures 2 and 3).

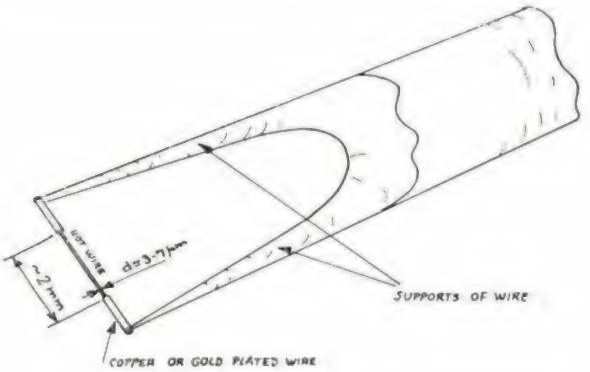


Figure 2 — The probe for hot wire anemometry

Q_h = heat transferred to the fluid by convection. The heat transfer cœfficient depends on the velocity of the fluid, i. e. on Reynolds number, and for values of $Re < 0.5$ natural convection predominates over forced convection. If we want to measure fluctuating components of velocity in turbulent flow need to use the smallest possible diameter for the wire, in order to obtain a high frequency response; with tungsten wires this diameter is about $5\,\mu$ m, which gives us a lower velocity limit of about 1 m/s.

Q_r = heat radiated from the hot wire to the outside medium. This may be written:

$$Q_r = S\,\sigma_r\,(\varepsilon\,T^4 - \alpha\,T_o^4) \quad , \qquad (6)$$

where:

S = external surface area of the hot wire,
σ_r = Stefan-Boltzmann constant,
ε = superficial emissivity of the wire at the temperature T (^{o}k), and
α = absorptivity of the surrounding medium at temperature T_o (^{o}k).

This term may also be neglected in comparison with Q_J.

Thus equation (4) may be written:

$$Q_J = Q_a + Q_s + Q_h \quad . \qquad (7)$$

Considering the relations that define Q_J, Q_a, Q_s and Q_h per unit length of the wire, we have:

$$\frac{I^2\,\rho_T}{A} = C\rho\,A\,\frac{\partial\,T}{\partial\,t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-k_T\,A\,\frac{\partial\,T}{\partial x}\right) + \\ + \pi\,d\,h\,(T - T_o) \quad . \qquad (8)$$

If we assume that the process is stationary, then Q_a is also negligble.

Taking in account the boundary values, equation (8) can be solved in order to obtain the temperature along the wire in function of time.

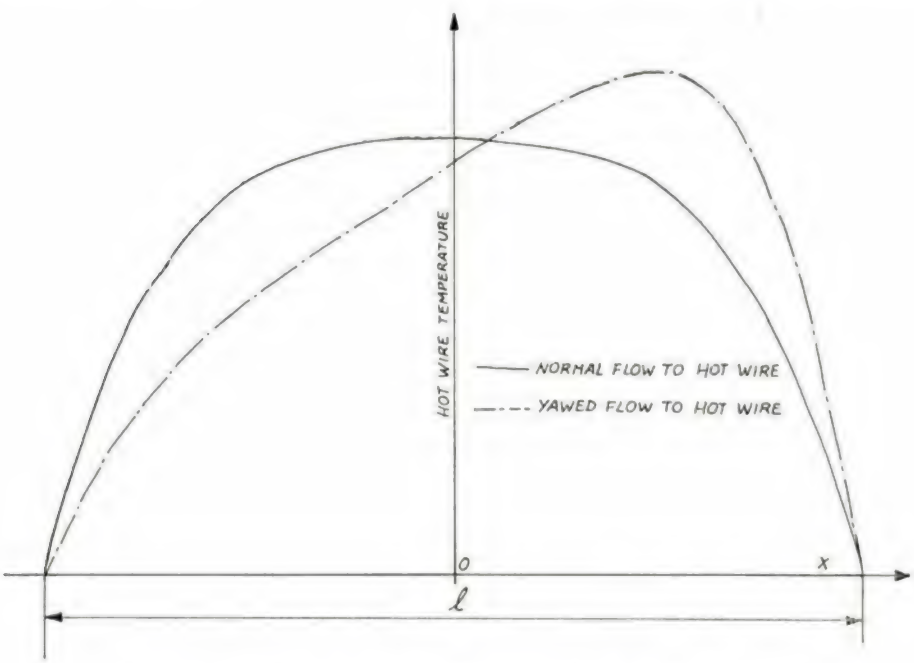


Figure 3 — Distribution of temperatures along the hot wire

3.3 — The probes used in hot wire anemometry consist of two supports across which may be soldered the wire whose dimensions are generally:

d — from 3 to 7 μ, more frequently 5 μ;
l — about 2 mm, but in general l > 300 d.

In figure 2 is sketched the characteristic form of a hot wire.

To define the length l of the wire, to reduce the influence of the progs on the velocity measurements, and in some cases to facilitate the soldering of the wire to the supports, is gold or copper-plated at the ends of the sensitive portion.

4. HOT WIRE CALIBRATION

4.1 — Hot wires are calibrated in stationary conditions for which equation (7) may be written:

$$Q_J = Q_s + Q_h. \qquad (9)$$

Neglecting the heat transferred along the wire to the supports (Q_s), we may write:

$$Q_J = Q_h, \qquad (10)$$

or:

$$R I^2 = k h (T - T_0). \qquad (11)$$

A linear relationship can be assumed for the temperature dependence of the resistance R (T):

$$R = R_0 [1 + \Psi (T - T_0)], \qquad (12)$$

where Ψ is the temperature coefficient of resistivity of the material of the wire.

Calibration curves can be obtained by placing the hot wire in a flow with constant velocity U, which gives us a constant value for h. Equations (11) and (12) show that there are then two variables R and I, we may also consider the voltage E between the extremities of the hot wire:

$$E = R I \quad . \qquad (13)$$

Then we have calibration curves in spaces (R,I), (E,R), and (I,E) at constant velocity whose shapes, shown in figures 4,5, and 6 are given by equations (11) and (12).

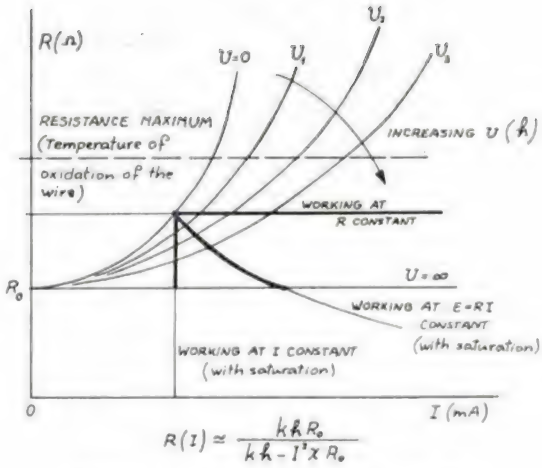


Figure 4 — Calibration curve R (I)

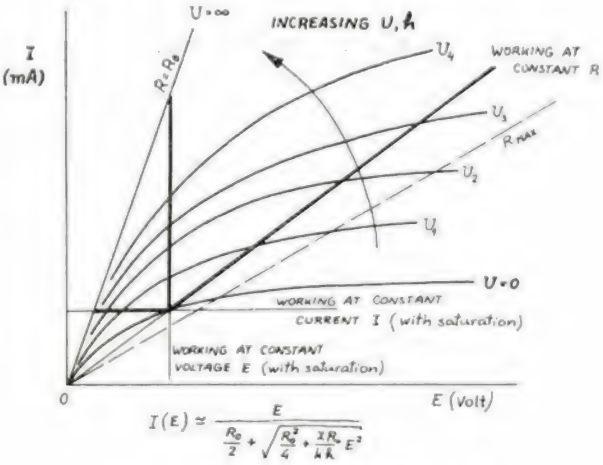


Figure 5 — Calibration curve I (E)

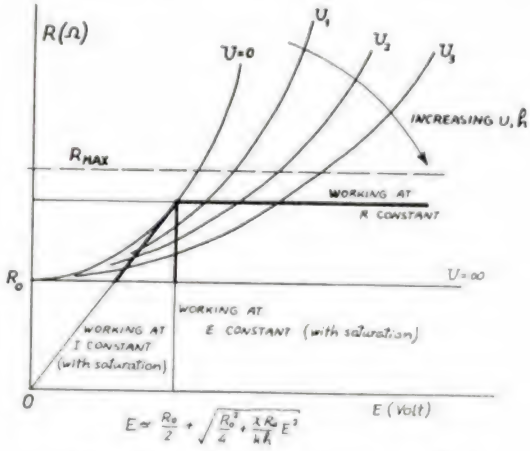


Figure 6 — Calibration curve R (E)

4.2 — When we are using a hot wire for turbulence measurements, these calibration curves are not needed as resistance and current will not be fluctuating independently during the

measurements. Hot wire anemometers are built in such a way as to keep one of the variables R or I constant during operation; for such units, the calibration curve will simply be the other variable (I or R respectively) as a function of the velocity, or the voltage E as a function of the velocity E (U).

4.3 — In figures 4,5 and 6 are shown sections across the curves corresponding to:

a. — hot wires working at *constant resistance* which, as can easily be seen from equation (23), is the same as *constant temperature;*

b. — hot wires working at *constant current;*

c. — hot wires working at *constant voltage.*

We can conceive an infinity of sections corresponding to hot wires operating under many other conditions; however, the problem is to guarantee that we are working in these conditions.

The most developed methods are the constant resistance (constant temperature) and constant current ones; these will be discussed in the next paragraphs.

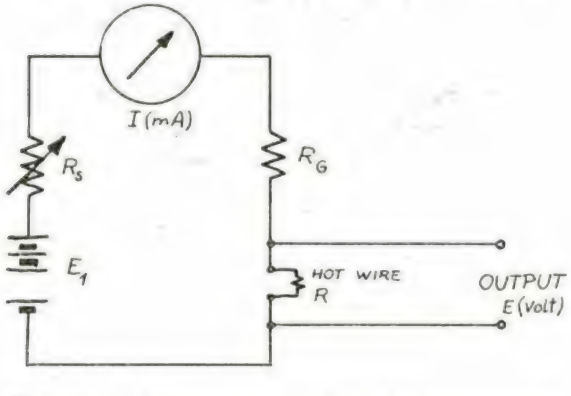


Figure 7 — Constant current hot wire anemometer

5. CONSTANT CURRENT HOT WIRE ANEMOMETER

5.1 — To obtain a hot wire working at constant, current, the wire is generally mounted in series with a large resistance so that the resistance fluctuations of the hot wire may be neglected compared with the series resistance. Figure 7 shows the circuit of the constant current hot wire anemometer. Using the nomenclature in the figure, the current through the hot wire is

$$I = \frac{E_1}{R + R_S + R_G}, \qquad (14)$$

and a fluctuation of R gives a fluctuation of current

$$\Delta I = -\frac{E_1}{(R + R_S + R_G)^2} \Delta R . \qquad (15)$$

If R_G is so much bigger than R, that $\Delta R \ll R + R_S + R_G$, then $\Delta I \simeq 0$, and we say that the hot wire is working with constant current.

5.2 — From figures 4,5, or 6 it is seen that hot wires working at constant current are saturated at high velocities, i.e. at high velocity the difference in the output from the hot wire unit for a given change in velocity is quite small, so that reproducibility in the measurements is hard to obtain. Also at high velocities, since the hot wire temperature is lower, the thermal capacitance of the wires becomes more important. This problem can be partly overcome by working with high currents at these high velocities; but a problem then arises that if there are large velocity fluctuations, or if the wire is removed from the flow without reducing the current, the wire may easily be oxidised (and broken).

6. CONSTANT TEMPERATURE HOT WIRE ANEMOMETER

6.1 — To obtain a hot wire working at constant temperature, it is necessary to use a feedback control system to supply a variable voltage to the wire, in such a may that its resistance is held constant. This can be acomplished with the circuit shown in figure 8 which operates on the following basis.

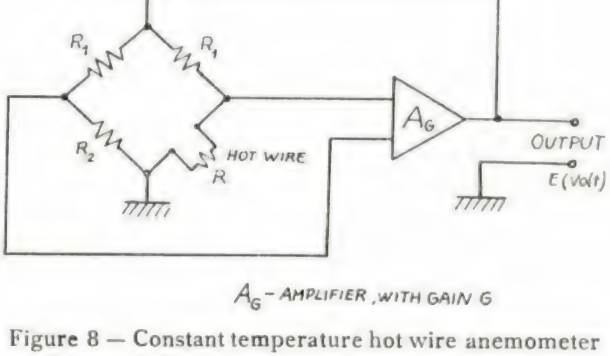


Figure 8 — Constant temperature hot wire anemometer

The hot wire is connected as one arm of a Wheatstone bridge, and a fluctuation in resistance of the wire causes a fluctuation in the voltage, e,

between A and C. This voltage when amplified by amplifier A_G is used to change the voltage between B and D in order to obtain $e = 0$ again.

Assume that when the bridge is balanced, i. e. when $e = o$ and $R = R_2$, the output from the amplifier is E_o. The voltage fluctuation e due to a fluctuation of velocity may be written.

$$e = \frac{R - R_2}{2\,(R + R_2)}\,E\ , \qquad (16)$$

and if G is the gain of the amplifier, the output voltage is

$$E = E_o + G\,.\,e. \qquad (17)$$

Combining (16) and (17), the hot wire resistance is given by

$$\frac{R}{R_2} = \frac{G + 2\left(1 - \frac{E_o}{E}\right)}{G - 2\left(1 - \frac{E_o}{E}\right)}\ . \qquad (18)$$

With a very high gain amplifier, we have

$$\lim_{G \to \infty} \frac{R}{R_2} = 1\ , \qquad (19)$$

and the hot wire is working at constant resistance, or constant temperature. In practice, the gain is limited by the noise from the circuit which may introduce alterations in the output from the hot wire unit.

6.2 — At constant resistance, the calibration curves may conveniently be expressed in the form

$$E = f\,(U)\ , \qquad (20)$$

assuming flow normal to the hot wire.

From dimensional analysis for the heat transfer from a hot wire, assuming only forced convection, we may write:

$$N_u = F\,(P_r, R_e)\ . \qquad (21)$$

With:

N_u = Nusselt number
P_r = Prandtl number
R_e = Reynolds number

defined for the fluid properties and the diameter of the wire.

King's law for the relation (21) is of the type:

$$N_u = A + B\sqrt{R_e}\ , \qquad (22)$$

where A and B depend on Prandtl number, but may be assumed to be constants in the case of air (for which the Prandtl number may be taken as uniform). A more accurate representation of the results compared with experimental measurements is given by Collis and Williams's law

$$N_u\left(\frac{T + T_o}{2T_o}\right)^{-0.17} = A_1 + B_1 R_e^{\,0.45}\ , \qquad (23)$$

where T and T_o are respectively the temperature of the hot wire and the temperature of the flow.

As the power converted to heat in the wire working at constant resistance is proporcional to E_2, we may write:

$$E^2 = E_o^2 + BU^n\ , \qquad (24)$$

for flow normal to the wire. This law comes from an overall heat balance and from King's law, and the coefficients B and n depend on the method of calibration. E_o is the output voltage at zero velocity.

King assigned to n the constant value 0.5, while for air Collis and Williams used 0.45 and stated that this value depends on velocity. Calibrations made by Davies and Bruun, and Kjellström and Durst showed that n depends on the velocity U of the flow, decreasing as the velocity increases. In their calculations, n was found using the outputs E_1 and E_2 from the hot wire at two distinct velocities U_1 and U_2; then, since

$$E_1^2 = E_o^2 + B\,U_1^n\ , \qquad (25)$$

and

$$E_2^2 = E_o^2 + B\,U_2^n\ , \qquad (26)$$

we obtain

$$n = \frac{\log\,(E_1^2 - E_o^2) - \log\,(E_2^2 - E_o^2)}{\log U_1 - \log U_2}\ . \qquad (27)$$

6.3 — In the case of wires yawed relative to the flow, the response of infinite wires depends only on the component of velocity normal to the wire. Thus equation (24) will be written:

$$E_\alpha^2 = E_o^2 + B\,(U\,.\,\cos\alpha)^n\ , \qquad (28)$$

where α is the angle defined by the direction of the flow relative to the normal to the hot wire, and E_α is the output from the hot wire anemometer when the probe is placed in a flow of velocity U at a yaw angle α.

For wires of finite length, Champagne, Kjellström, and others used the relationship

$$E_\alpha^2 = E_o^2 + B\,U^n\,(\cos^2\alpha + K^2\sin^2\alpha)^{n/2} \qquad (29)$$

which reduces to equation (28) for $K = o$.

K depends on the value of n, and quite different value for K are obtained when using the n values of King, Collis and Williams, or Kjellström and Hedberg. It has been shown that K varies linearly with the diameter/length ratio of the wire.

Davies and Bruun use the equation

$$E_\alpha^2 = E_o^2 + B\,U^n \cos^m \alpha \qquad (30)$$

where n is the exponent defined with the flow normal to the wire and m is a value which depends on the diameter-length ratio of the wire. In order to compare the results from equations (29) and (30), these may be expressed in non-dimensional form by comparison with equation (24) for flow normal to the hot wire.

The non-dimensional quantities:

$$\frac{E_\alpha}{E_{\alpha=o}} = \sqrt{\left(\frac{E_o}{E_{\alpha=o}}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E_o}{E_{\alpha=o}}\right)^2\right] \cdot \left(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{n}{2}}} \qquad (31)$$

and:

$$\frac{E_\alpha}{E_{\alpha=o}} = \sqrt{\left(\frac{E_o}{E_{\alpha=o}}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{E_o}{E_{\alpha=o}}\right)^2\right]\cos^m \alpha} \qquad (32)$$

can be compared when plotted as a function of α.

7. SENSITIVITY COEFFICIENTS OF HOT WIRES

7.1 — Let us supose that a hot wire is placed in a turbulent flow, normal to the direction of the mean velocity vector (see figure 9). The instantaneous effective velocity of the flow may be written

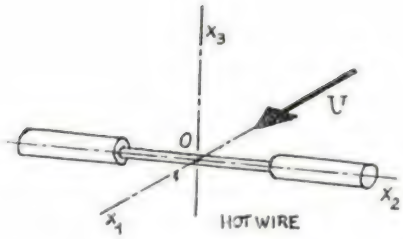


Figure 9

$$U_{eff} = \sqrt{(U + u_1)^2 + u_2^2 + u_3^2}\ , \qquad (33)$$

i.e.:

$$U_{eff} = U\sqrt{1 + 2\frac{u_1}{U} + \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{U^2}}\ . \qquad (34)$$

Considering the series development of the square root term:

$$U_{eff} = U\left[1 + \frac{u_1}{U} + \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2U^2} + \dots\right] \qquad (35)$$

and neglecting all terms above first order we, may write

$$U_{eff} - U \simeq u_1\ . \qquad (36)$$

Thus the hot wire is sensitive only to the fluctuations of velocity in the direction of the mean velocity U, normal to the wire.

Let us now assume that the mean velocity vector makes an angle Ψ with the normal to the hot wire (see figure 10).

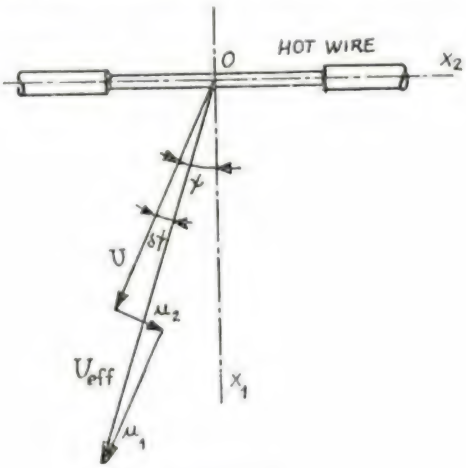


Figure 10

Then we may write:

$$u_1 = \delta\,U\ , \qquad (37)$$

$$u_2 = \delta\,\Psi\ . \qquad (38)$$

As the output voltage from the hot wire is:

$$E = E\,(U, \Psi) \quad , \qquad (39)$$

then, for small fluctuations of E

$$\delta E = e = \frac{\partial E}{\partial U}\,\delta U + \frac{\partial E}{\partial \Psi}\,\delta \Psi \quad , \qquad (40)$$

and from (37) and (38):

$$e = \alpha \frac{u_1}{U} + \beta \frac{u_2}{U} \quad , \qquad (41)$$

where:

$$\alpha = U \frac{\partial E}{\partial U} \quad , \qquad (42)$$

and:

$$\beta = \frac{\partial E}{\partial \Psi} \quad , \qquad (43)$$

are respectively the coefficients of sensitivity parallel and normal to the direction of the mean velocity U.

Using equation (29), and assuming n, k, and t $\left(= \frac{n}{2}\right)$ are independent of U

$$E^2 = E_o^2 + B\,U^n (\cos^2 \Psi + k^2 \sin^2 \Psi)^t \,, \qquad (44)$$

we obtain:

$$\alpha = U \frac{\partial E}{\partial U} = \frac{n\,(E^2 - E_o^2)}{2\,E} \qquad (45)$$

$$\beta = \frac{\partial E}{\partial \Psi} = \frac{t\,(k^2 - 1)\,(E^2 - E_o^2)\sin 2\Psi}{2\,E\,(\cos^2 \Psi + k^2 \sin^2 \Psi)} \,. \qquad (46)$$

7.2 — Let us assume that we have a hot wire placed in a flow at an angle of yaw ψ with an instantaneous output voltage.

$$e_\psi = \alpha_1 \frac{u_1}{U} + \beta_1 \frac{u_2}{U} \quad , \qquad (47)$$

to which corresponds the r.m.s. value

$$\overline{e_\psi^2} = \alpha_1^2 \frac{\overline{u_1^2}}{U^2} + \beta_1^2 \frac{\overline{u_2^2}}{U^2} + 2\,\alpha_1 \beta_1 \frac{\overline{u_1 u_2}}{U^2} \,. \qquad (48)$$

If the wire is now turned until its normal makes an angle $(-\psi)$ with the mean velocity vector, the voltage output will be:

$$e_{-\psi} = \alpha_1 \frac{u_1}{U} - \beta_1 \frac{u_2}{U} \quad , \qquad (49)$$

with a mean square value:

$$\overline{e_{-\psi}^2} = \alpha_1^2 \frac{\overline{u_1^2}}{U^2} + \beta_1^2 \frac{\overline{u_2^2}}{U^2} - 2\,\alpha_1 \beta_1 \frac{\overline{u_1 u_2}}{U^2} \,, \qquad (50)$$

thus:

$$\overline{e_\psi^2} \neq \overline{e_{-\psi}^2} \quad . \qquad (51)$$

From equations (47) to (49) we can obtain the fluctuating components u_1 and u_2, and the values of the tensor $\overline{u_i u_j}$.

7.3 — More generally, we can assume that the voltage between the ends of the hot wire depends not only on the velocity U and the angle ψ, but also on the temperature T of the fluid (assuming constant temperature hot wire operation).

Then

$$E = E\,(U, \psi, T) \quad . \qquad (52)$$

If θ is a small fluctuation of T, then the instantaneous output voltage will be

$$e = \alpha \frac{u_1}{U} + \beta \frac{u_2}{U} + \gamma \frac{\theta}{T} \quad , \qquad (53)$$

where:

$$\gamma = T \frac{\partial E}{\partial T} \,, \qquad (54)$$

is the sensitivity coefficient of the hot wire to the temperature of the fluid.

From paragraph 2 we can write

$$\frac{E^2}{R} = h^* \left(T_w - T\right) , \qquad (55)$$

where T_w is the temperature of the hot wire, and h^* represents the forced convection heat transfer coefficient depending on U and ψ.

For small fluctuations θ of the fluid temperature

$$\varepsilon = \left| \frac{\delta E}{E} \right| = 1 - \left(1 - \frac{\theta}{T_w - T}\right)^{1/2} \,, \qquad (56)$$

or:

$$\varepsilon = \frac{\theta}{2\,(T_w - T)} \left[1 + \frac{\theta}{T_w - T} + \frac{1}{8} \left(\frac{\theta}{T_w - T} \right)^2 + \ldots \right] \qquad (57)$$

and we can neglect ε if, and only if, $\theta << T_w - T$.

For liquids it is much more difficult to obtain $\theta << T_w - T$ than for gases because the hot wire

temperature needs to be lower to prevent bubble formation in the liquid near the wire, and also because it is difficult to obtain a uniform temperature in the system. Thus in cases where the effect of temperature is important, the measurements obtained need to be corrected. Alternatively, the hot wire anenometer may be temperature-compensated by using a second system sensitive only to the temperature of the liquid to correct the output from the hot wire.

8. TABLES

TABLE 1

Electrical resistance of materials

Factors on which resistance depends		Corresponding coefficient
dimensions of wire, which depend on deformation	at constant volume	sensitivity factor (gauge factor)
	by hydrostatic compression	pressure coefficient of resistance
temperature		temperature coefficient of resistivity

TABLE 2

Applications of resistance transducers

Factors on which the resistance of the transducer depends		application
deformation	at constant volume	extensometry transducers
	by hydrostatic compression	pressure transducers
temperature, which is affected by	heat transfer by conduction	thermal conductivity and thermal diffusivity transducers
		vacuum pressure transducers
	heat transfer by convection	anemometry transducers
	total heat transfer	temperature transducers

TABLE 3

Temperature coefficient of resistance for some materials (*)

Material	ρ_0 = resistivity at 0°C ($10^6\ \Omega$ cm.)	ψ = temperature coefficient of resistance (Ω. cm. °C $^{-1}$)
Copper	1.7	$4. \times 10^{-3}$
Constantan	4.9	$2. \times 10^{-6}$
Manganin	44.	$5. \times 10^{-6}$
Platinum	10.	3.9×10^{-3}
Tungsten	5.6	$5. \times 10^{-3}$

Note — resistivity at temperture T (°C) assuming a linear dependence for ρ (T) is:

$$\rho(T) = \rho_0 \left[1 + \psi T\right].$$

NOMENCLATURE

O — point of measurement
Ox_i (i = 1,2,3) — coordinate axes through point O
U_i (i = 1,2,3) — time mean components of velocity
u_i (i = 1,2,3) — fluctuating components of velocity
v (t) — theoretical value of any function of time
v_{meas} (t) — measured value of v (t)
$\overline{v}$ (t) — time mean value of v (t)
R — electrical resistance
I — electrical current
E — electrical voltage
l — length of wire
d — diameter of wire
α — sensitivity of wire to the component u_1
β — sensitivity of wire to the component u_2
γ — sensitivity of wire to the temperature of the fluid.

(*) from: HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHYSICS 43rd Edition (1961-62) Chemical Rubber Pubs. Co.

REFERENCES

ANTUNES, S.D. — Application of Wires and Films. as transducers — (Int. Note of N.E.E.M).

BRADSHAW, P. and JOHNSON, R. F. — Turbulence measurement with hot wires anemometers —N.P.L — Notes on Applied Science, n.º 33 — 1963.

BRUUN, H. H. — The perfomance of normal and yawed hot wires — I.S.V.R. Tech. Rp. 21 — 1969.

CORRSIN, S. — Turbulence: Experimental Methods.

DAVIES, P.O.A.L. — Recent Developments in hot wire anemometry, I.S.V.R. — 1969.

DAVIS, M.R. and DAVIES, P.O.A.L. — The Physical Characteristics of Hot wire anemometers — I.S.V.R. Tech. Rp. 2 — 1968.

DOMINGOS, J.J.D. — Fundamental equations of turbulent incompressible flows, Técnica 406 — 1971.

DURST, F. — Introduction to laser doppler — shift anemometry, Técnica 408 — 1971.

DURST, F. — On turbulent flow through annular passages with smooth and rough cores — Msc. Thesis, Mec. Eng. Dept, I.C. — 1968.

GRANT, H.P. and KRONAUER, R.E. — Fundamentals of Hot wire anemometry.
Symposium on Measurements in unsteady flow — ASME, May 1962.

HINZE — Turbulence (Chap. 2: Measurement of turbulent flows) — ed. Mc Graw-Hill — 1959.

KOVASZNAY, L.S.G. — Turbulence measurements — Sect. F of Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion — Vol. IX of the series High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion — ed. Princeton Univ. Press — 1954.

RASMUSSEN, C. G. and MADSEN, C.G. — Hot wire and hot film anemometry — DISA — Techn. Information Bulletin — 1967.

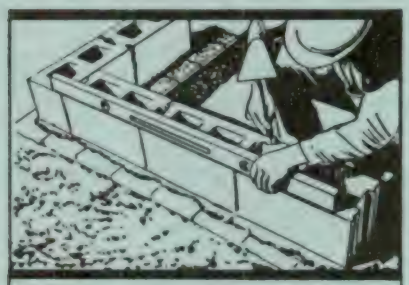
WHITELAW, J.H. — Prediction procedures for two-dimensional boundary layer flows: equations and assumptions, Técnica 406 — 1971.

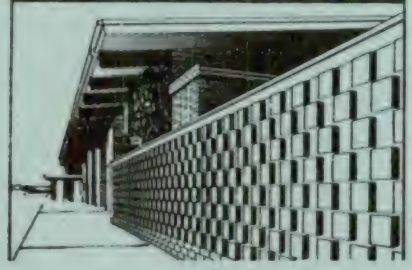
BLOCOS DE CIMENTO LIZ

Um material novo para a construção civil

Fabricado segundo a técnica mais avançada com máquinas e matérias primas excepcionais, o **BLOCO DE CIMENTO LIZ** utiliza-se em todos os tipos de construção:

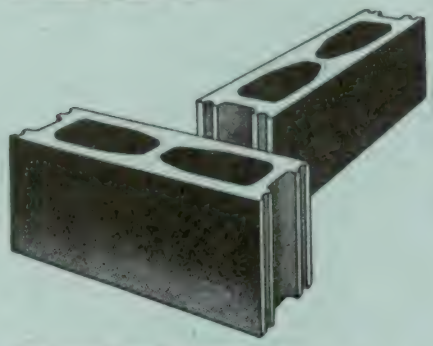
- Paredes resistentes, divisórias e paredes de caves
- Pilares
- Muros e vedações diversas
- Lages para pavimentos





Tanto nestas utilizações como em quaisquer outras, o **BLOCO DE CIMENTO LIZ** reune as seguintes vantagens:

- Baixo custo relativo
- Alta qualidade de acabamento
- Reboco desnecessário
- Excelente isolamento acústico e térmico
- Múltiplos efeitos decorativos
- Impermeabilidade
- Cores variadas
- Peso baixo (blocos leves) ou normal



BLOCOS DE CIMENTO LIZ
FURADOS E MACIÇOS

Um produto de alta qualidade distribuido pela

EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA, SARL

Encomendas pelos telefones: — 313031 - 313032 - 311796

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

TELEF. 5 20 91/2/3 — OVAR - PORTUGAL — TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS

TECIDOS FILTRANTES E INDUSTRIAIS

de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualquer formato e dimensão
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDUSTRIAIS

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C. P. 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C. P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C. P. 1002 - Tel. 7 14 97

C. D. U. 519.738

SOBRE O CRITÉRIO LIAPUNOV NA TEORIA DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS

por HERMÍNIO DUARTE-RAMOS

Colaborador Científico do Schering-Institut (T. U. Hannover)
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Bolseiro da U. L. (Angola)

RESUMO

Definem-se as noções de estabilidade e efectua-se a sua interpretação geométrica. Exemplifica-se o método directo e o critério Liapunov num sistema mecânico. Comparam-se os diversos métodos de formação de funções Liapunov em sistemas não lineares.

SYNOPSIS

We define the conceptions of stability and show their geometric interpretatione. The direct method and the Liapunov criterion are applied on a mechanical system. The methods of formation of Liapunov functions in non-linear systems are compared

1. INTRODUÇÃO

No final do século passado Liapunov [1] estabeleceu dois métodos de estudo da estabilidade de sistemas. No «Primeiro Método» procurou definir as condições de estabilidade através da resolução da equação diferencial de estado do sistema. Mas dada a dificuldade nessa resolução Liapunov definiu o «Segundo Método» em que se aprecia a estabilidade sem solucionar a equação diferencial de estado, baseando-se num critério energético do sistema físico.

As ideias contidas no «Segundo Método», também designado «Método Directo» por se ocupar directamente do sistema sem atender à resolução da equação de estado, constituem os alicerces dos métodos modernos de estabilidade de sistemas, nomeadamente no controle automático ou na análise do comportamento transitório de redes eléctricas.

De facto estabelecendo-se a energia de um sistema dinâmico em função das suas variáveis de estado, se esta função do tempo t tende para zero quando t cresce significa que a energia se reduz monòtonamente e portanto o movimento do sistema tende para o repouso, quer dizer, a origem das coordenadas de estado é um ponto de equilíbrio. A apreciação da estabilidade resulta assim da «função energia», subordinada às hipóteses indicadas (expressas nas variáveis de estado e tender para zero quando t tende para infinito). Se se conseguir porém definir uma função que, embora não representando a energia do sistema, satisfaça às condições enunciadas, poder-se-á anàlogamente julgar sobre a estabilidade. A essa função chama-se «função Liapunov».

Estas considerações dão ao «Segundo Método de Liapunov» um interesse puramente histórico, pois o problema consta agora na formação de uma função Liapunov que prove a estabilidade. Diversos métodos têm sido propostos, não se tendo contudo encontrado um esquema geral e prático. O recente critério de Popov por outro lado deu à questão uma importância prática secundária.

Pretende-se neste artigo concretizar as ideias essenciais da teoria da estabilidade, enunciando os conceitos básicos dos métodos apresentados na literatura, e estabelecer uma sistematização didáctica do problema da estabilidade.

2. DEFINIBILIDADE DE UMA FUNÇÃO

Antes de se analisar o conceito de estabilidade é importante introduzir algumas noções básicas para o seu tratamento matemático.

Chama-se *norma* $\| \mathbf{x} \|$ à distância $\| \mathbf{x} \| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ou seja $\| \mathbf{x} \| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$, onde $\mathbf{x}^T$ representa o vector transposto de $\mathbf{x}$.

Uma função contínua $V(\mathbf{x})$ diz-se *definida* (positiva ou negativa) na vizinhança da origem $\mathbf{0}$ quando nessa vizinhança possui derivadas parciais contínuas e em todos os seus pontos apresenta

o mesmo sinal (respectivamente, positivo ou negativo) excepto na origem onde é nula.

a) Função *definida positiva* (apresenta um mínimo na origem):

$$V(x) > 0 \quad \text{para todos} \quad x \neq 0$$
$$V(0) = 0.$$

b) Função *definida negativa* (apresenta um máximo na origem):

$$V(x) < 0 \quad \text{para todos} \quad x \neq 0$$
$$V(0) = 0.$$

Uma função $V(x)$ é *semi-definida* (positiva ou negativa) na vizinhança da origem 0 quando nessa vizinhança possuir derivadas parciais contínuas, for nula na origem e nos restantes pontos da vizinhança apresentar o mesmo sinal (respectivamente, positivo ou negativo) ou o valor nulo.

c) Função *semi-definida positiva*:

$$V(x) \geqslant 0 \quad \text{para todos} \quad x \neq 0$$
$$V(0) = 0 .$$

d) Função *semi-definida negativa*:

$$V(x) \leqslant 0 \quad \text{para todos} \quad x \neq 0$$
$$V(0) = 0.$$

Uma função $V(x)$ diz-se *indefinida* quando na vizinhança da origem 0 possui sinais positivo e negativo, isto é, quando não for semi-definida.

e) Função *indefinida*:

$$V(x) \gtrless 0 .$$

Por exemplo a função $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ no espaço bi-dimensional R^2 é definida positiva pois só se anula na origem, para $x_1 = x_2 = 0$, e nos restantes pontos é sempre positiva. A mesma função no espaço tri-dimensional R^3 é semi-definida positiva pois se verifica o seu anulamento para $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e além disso para todos os pontos $x_1 = x_2 = 0$ com $x_3 \neq 0$. Anàlogamente $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ no espaço R^n é definida positiva e $V(x) = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ no espaço R^n é definida negativa. A função $V(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ no espaço R^3 é semi-definida positiva porque se anula para $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e ainda para $x_1 = \quad x_2$ com $x_3 = 0$. A função $V(x) = x_1 + x_2$ é indefinida pois pode assumir valores positivos ou negativos conforme os sinais de x_1 e x_2.

Diz-se que a função $V(x)$ assume a *forma quadrática* quando se exprime na forma $V(x) = \sum_{i,k=1}^{n} q_{ik} x_i x_k$ onde $q_{ik} = q_{ki}$, podendo-se representar por $V(x) = x^T Q x$ onde Q é a matriz simétrica dos coeficientes q_{ik}.

Para interpretar geomètricamente a forma quadrática observa-se que no espaço R^2, por exemplo, $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ corresponde a uma família de circunferências centradas na origem para diferentes valores $V(x) = c^{te}$; do mesmo modo $V(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ com os parâmetros λ_1 e λ_2 positivos, representa um campo de elipses; e mais genèricamente $V(x) = q_{11} x_1^2 + 2q_{12} x_1 x_2 + q_{22} x_2^2$ corresponde a uma família de elipses rodada em relação aos eixos coordenados, podendo escrever-se $V(x) = \sum_{i,k=1}^{2} q_{ik} x_i x_k$ com $q_{21} = q_{12}$.

A forma quadrática definida positiva representa o tipo de funções definidas positivas mais simples. Se os coeficientes q_{ik} não são constantes mas dependem de $x_1, \ldots, x_n$ a função

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} q_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, x_i x_k = x^T Q(x)\, x$$

define a *pseudo-forma quadrática*.

A verificação da definibilidade de uma função efectua-se através do *Teorema de Sylvester*: A condição necessária e suficiente para que uma função $V(x)$ na sua forma quadrática $V(x) = x^T Q x$ seja definida positiva é que sejam positivos todos os sub-determinantes da diagonal principal da matriz Q

$$\begin{bmatrix} >0 & >0 & >0 & & >0 \\ q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Também a forma pseudo-quadrática pode ser definida positiva se os coeficientes $q_{ik}(x_1, \dots, x_n)$ satisfazem ao teorema de Sylvester, isto é, se num ponto qualquer $x_o \neq 0$ os valores dos coeficientes $q_{ik}(x_o)$ determinam a verdadeira forma quadrática $\sum_{i,k=1}^{n} q_{ik}(x_o)\, x_i\, x_k$ definida positiva, sendo portanto em x_o o valor $\sum_{i,k=1}^{n} q_{ik}(x_o)\, x_{io}\, x_{ko}$ um valor positivo.

Para se verificar a definibilidade de uma dada função $V(x)$ verifica-se se os determinantes $D_1 = q_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \dots D_n = |Q|$ são todos positivos (função definida positiva). No caso em que $-V(x)$ é definida positiva será $V(x)$ definida negativa, quer dizer, para provar que uma forma ou uma pseudo-forma $V = x^T Q x$ é definida negativa utiliza-se o teorema de Sylvester para provar que $-V = x^T(-Q)\, x$ é definida positiva.

3. DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE

Considere-se um *sistema autónomo* [2] definido pela equação de estado $x' = f(x)$ expressa nas variáveis de estado x.

Por uma translação dos eixos coordenados do *espaço de estado* do sistema é sempre possível considerar um dado ponto de equilíbrio na origem do sistema, de entre os vários pontos de repouso que o sistema possa ter correspondentes a $f(x) = 0$.

Na ocorrência de uma perturbação do sistema qué o retire transitòriamente do ponto de equilíbrio, o sistema movimenta-se sobre uma *trajectória* no espaço de estado, caracterizada pela variável tempo t.

Admitida a origem 0 como sendo um ponto de equilíbrio do sistema, seja S (r) um domínio à volta da origem, de raio genérico $r > o$, constituído por pontos satisfazendo a $\| x \| < r$, que designamos por *domínio inicial*, no interior do qual se considera o início do movimento do sistema. O domínio S (r) pode ser arbitràriamente pequeno.

De modo análogo se define o *domínio de ingresso* S (R), de raio genérico $R > o$, como sendo o maior dos domínios contendo a origem (ponto de equilíbrio) para o qual o movimento se verifica sempre no interior desde que tenha começado num dado domínio inicial com $r < R$. É evidente que o domínio de ingresso é função do domínio inicial, isto é, R é uma função de r.

Nestas condições o ponto de equilíbrio (origem das coordenadas variáveis de estado) diz-se:

a) *Simplesmente estável* (1) se cada trajectória iniciada num dado domínio inicial S (r) não sai para fora de um domínio de ingresso S (R), onde R = R (r), quando t tende para infinito (fig. 1-a).

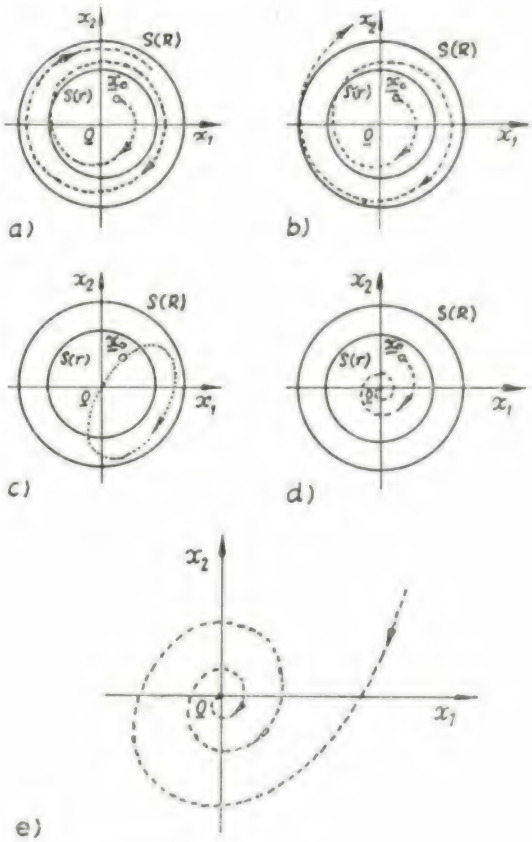


Fig. 1 — Definição de estabilidade.
a) Estabilidade simples
b) Instabilidade.
c) Instabilidade indiferente.
d) Estabilidade assimptótica.
e) Estabilidade assimptótica-global.

b) *Instável*, em caso contrário (fig. 1-b).

c) *Indiferente*, (2) quando existir uma trajectória em cujos pontos se verifica a estabilidade simples (fig. 1-c).

(1) Também se designa na literatura por *estabilidade em sentido de Liapunov*.

(2) Encontra-se na literatura a designação de *estabilidade fraca*.

d) *Assimptòticamente estável* se cada movimento começado em S (r) não só permanece dentro de S(R) mas também se aproxima da origem quando t tende para infinito (fig. 1-d).

e) *Assimptótica-globalmente estável* se a estabilidade assimptótica corresponde à totalidade do espaço de estado (fig. 1-e).

Note-se que a noção de estabilidade é caracterizada pela dimensão do domínio de ingresso, que no caso limite de ser infinitamente grande conduz ao conceito de estabilidade *global*.

4. MOVIMENTO DE UM SISTEMA

Para esclarecimento do conceito de estabilidade analisa-se o movimento de um sistema no espaço de estado bi-dimensional, caracterizado por duas variáveis de estado x_1 e x_2 (o mesmo raciocínio generaliza-se para qualquer número de variáveis de estado, numa interpretação gráfica num hiper-espaço n-dimensional), quando se parte de um ponto inicial x_0 ligeiramente afastado da origem das coordenadas. Conforme a trajectória descrita pelo sistema, após este desvio transitório da origem admitida um ponto de equilíbrio, assim se terá um tipo de estabilidade.

A fim de melhor se compreender as noções introduzidas compara-se cada um dos casos possíveis com uma evolução temporal relativa à projecção do movimento no plano x, t de uma das variáveis de estado x.

a) O sistema tende para um *ponto estável*:

Caso 1 (fig. 2-a) — ponto estável final mais afastado da origem que o ponto inicial (estabilidade simples).

Caso 2 (fig. 2-b) — ponto final mais perto da origem (estabilidade simples).

Caso 3 (fig. 2-c) — ponto final na origem (estabilidade assimptótica).

b) O sistema tende para uma *trajectória estável* (estabilidade indiferente ou fraca):

Caso 4 (fig. 2-d) — ponto inicial interior à trajectória estável.

Caso 5 (fig. 2-e) — ponto inicial exterior à trajectória estável.

Caso 6 (fig. 2-f) — ponto inicial sobre a trajectória estável.

c) O sistema *não tem pontos estáveis* (instabilidade):

Caso 7 (fig. 2-g) — ponto final no infinito.

5. FUNÇÃO LIAPUNOV

Como se indicou o método directo conduziu fìsicamente ao estabelecimento de uma função «energia» que, satisfazendo à propriedade física de decréscimo contínuo da energia quando t aumenta, permite apreciar a estabilidade. Estas características podem contudo exprimir-se de um modo genérico pela análise matemática, definindo-se então a função Liapunov.

Chama-se *função Liapunov*, em relação às variáveis de estado x de um sistema dinâmico com a equação de estado $x' = f(x)$, à função escalar $V(x)$ definida positiva numa vizinhança da origem e com derivadas parciais contínuas de modo a que a sua derivada $V'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ ou $V'(x) = f^T \text{ grad } V(x)$ seja definida negativa ou pelo menos semi-definida negativa nessa vizinhança.

Com vista à interpretação geométrica deste conceito considere-se um sistema de 2.ª ordem, definido por duas variáveis de estado, $x = [x_1, x_2]$. Admita-se uma função qualquer $V(x) = c$, com $c \geq 0$, onde o valor de c determina uma curva no espaço de estado designada *linha de nível*. Diferentes valores de c originam um campo de curvas de nível em todo o plano de estado (x_1, x_2). Supõe-se que a função $V(x_1, x_2)$ é unívoca e é diferenciável em todos os pontos, existindo portanto em cada ponto sempre uma linha de nível. Observam-se contudo três pontos singulares (fig. 3): pontos extremos («pico» ou «fundo»), onde as linhas de nível se reduzem a pontos, e ponto «sela», no qual duas linhas de nível se contactam. Em qualquer destes casos o plano tangente à superfície $V(x_1, x_2)$ é horizontal e por conseguinte $\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$, quer dizer, nestes pontos singulares será $V' = 0$.

Nestas circunstâncias, sendo $V(x_1, x_2)$ uma função Liapunov, como se definiu, conclui-se:

a) Só pode haver pontos singulares na origem, pois sendo $V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2$ definida

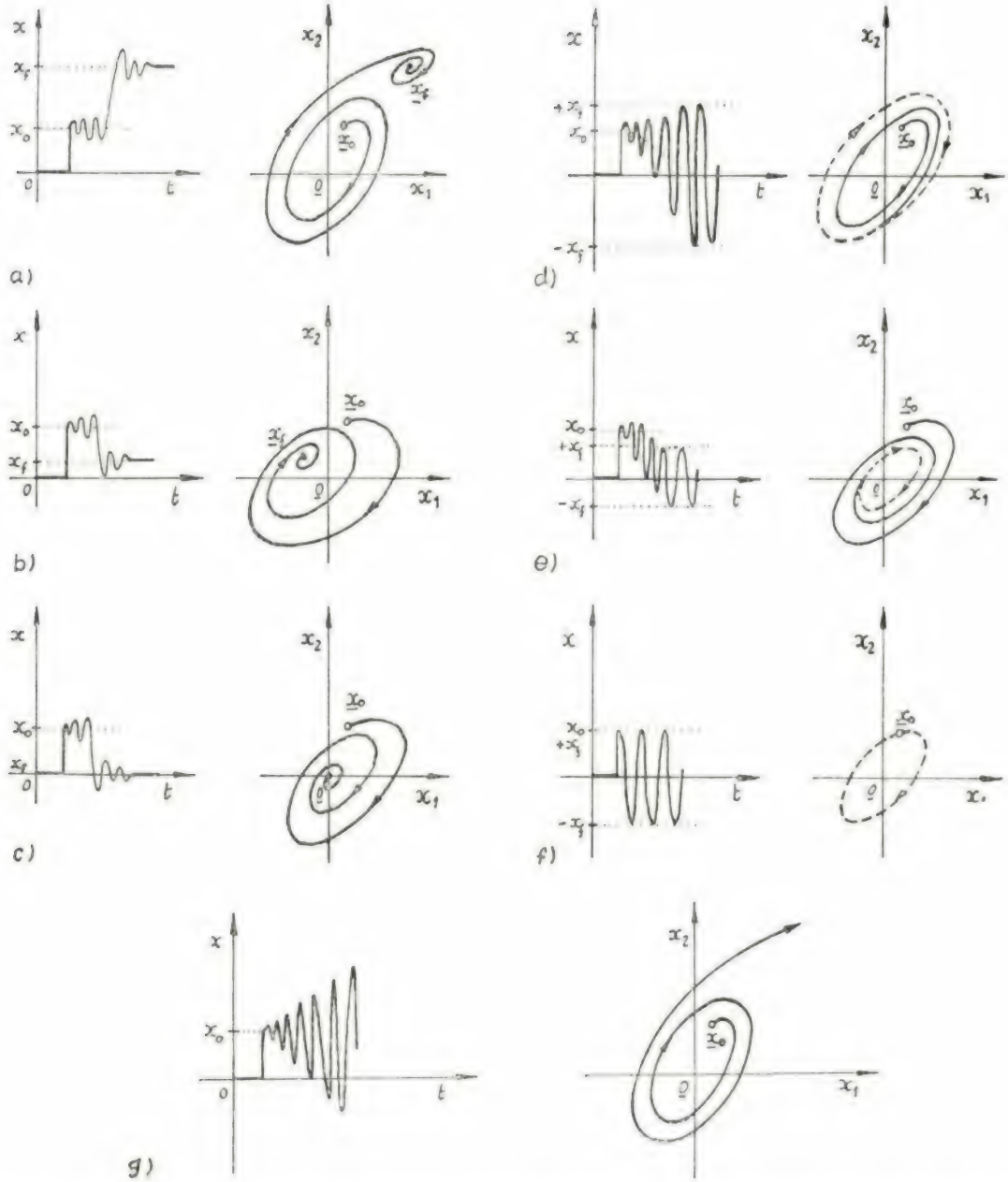


Fig 2 — Tipos de movimento de um sistema: estabilidade simples (a, b), estabilidade assimptótica (c), estabilidade indiferente (d, e, f) e instabilidade (g).

negativa será $V' = 0$ na origem $x = 0$ e no restante espaço onde é definida $V' < 0$.

b) O ponto singular na origem só pode ser um ponto extremo visto que $V'(x)$ deve ser contìnuamente monòtonamente decrescente.

c) A origem só pode ser um ponto fundo dado que a função $V(x)$ é definida positiva, isto é, nula na origem 0 e positiva no restante espaço, pelo que a função Liapunov $V(x)$ corresponde geomètricamente a um «poço» (fig. 4 - a). Assim as curvas de nível à volta da origem são fechadas e os seus valores paramétricos crescem à medida que as curvas se afastam da origem.

Ao espaço onde a função Liapunov é definida chamaremos *domínio Liapunov*. Dentro deste domínio uma trajectória deverá penetrar nas linhas de nível de fora para dentro (fig. 4 - b) porquanto sendo $V' < 0$ ao longo da trajectória (só na origem é $V' = 0$) a função $V(x(t))$ terá de ser uninterruptamente decrescente.

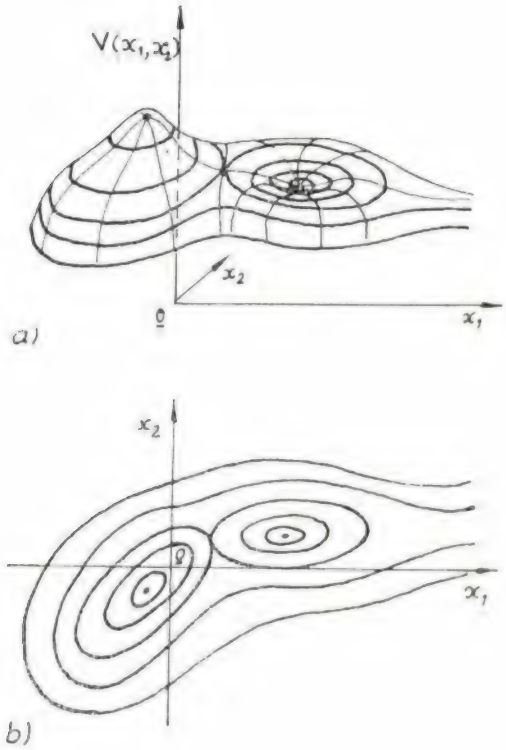


Fig. 3 — Representação gráfica de uma função qualquer $V(x_1, x_2)$: 1 — pico, 2 - fundo, 3 — sela.
a) Monte e poço da superfície V (x).
b) Campo de linhas de nível.

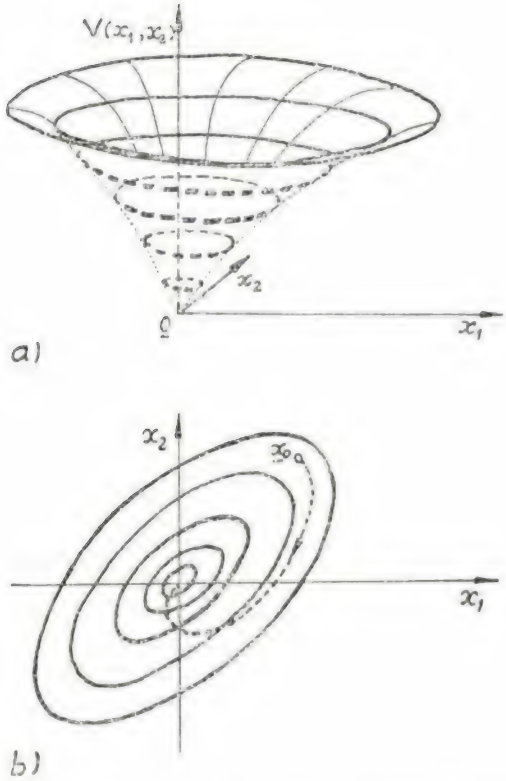


Fig. 4 — Representação gráfica de uma função Liapunov $V(x_1, x_2)$: O — ponto fundo (origem).
a) Poço da superfície V (x).
b) Campo de linhas de nível e trajectória numa vizinhança da origem.

6. ESTABILIDADE ASSIMPTÓTICA

Vê-se portanto que a função Liapunov, numa vizinhança da origem, corresponde a uma trajectória que se dirige para a origem. Nestas condições se existir essa função a estabilidade assimptótica fica assegurada. Observa-se todavia a hipótese admitida da vizinhança ser suficientemente pequena para que se verifique realmente a convergência da trajectória, isto é, embora o domínio Liapunov possa ser grande a região interessada limita-se ao chamado domínio de ingresso.

Se o domínio Liapunov se estender a todo o espaço de estado, sendo $V(x) \longrightarrow \infty$ quando a norma $\| x \| \longrightarrow \infty$, então também o domínio de ingresso corresponde à totalidade do espaço e caracteriza-se a estabilidade assimptótica global.

Decisivo por conseguinte na apreciação da estabilidade assimptótica é encontrar uma função Liapunov que determine o maior domínio de ingresso possível. Deste modo se reparte a noção de estabilidade assimptótica em pequeno, em grande e em total, conforme as dimensões do domínio de ingresso.

A *estabilidade assimptótica em pequeno* é caracterizada por um domínio de ingresso de reduzidas dimensões, podendo portanto pràticamente corresponder a uma instabilidade se esse domínio for excessivamente reduzido. Por exemplo, um sistema em equilíbrio a 100 V se possuir um domínio de ingresso com o raio de 1 m V é pràticamente instável dada a possibilidade normal de flutuações da tensão acima de 0,001 %.

Na *estabilidade assimptótica em grande* define-se um certo domínio de ingresso limitado no espaço de estado (contendo a origem e onde a função Liapunov é definida, verificando-se por consequência em qualquer ponto desse domínio a estabilidade assimptótica), podendo ser apenas parte do domínio Liapunov, pelo que na restante zona do domínio Liapunov se poderá verificar a instabilidade pois a trajectória, dirigindo-se dentro do domínio Liapunov, onde $V' < 0$, sempre para as linhas de nível de menor parâmetro, poderá

eventualmente atingir a zona do espaço em que $V' > 0$ (exterior ao domínio Liapunov) sem se dirigir por consequência para a origem, isto é, sem penetrar no domínio de ingresso (fig. 5).

No caso de *estabilidade assimptótica em total* o domínio de ingresso pertence à totalidade do espaço de estado, correspondendo portanto à estabilidade assimptótica global, para o que se exige que a função Liapunov seja infinita quando o ponto x do espaço de estado se encontra no infinito: $V(x) \longrightarrow \infty$ para $\| x \| \longrightarrow \infty$.

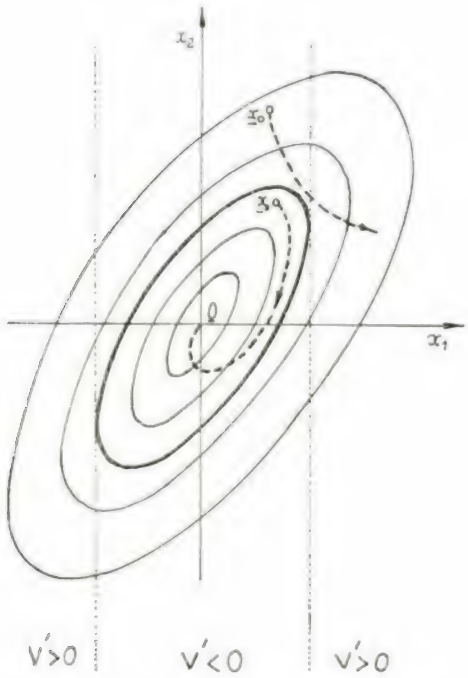


Fig. 5 — Estabilidade assimptótica em grande (domínio Liapunov para $V' < 0$).

7. ESTABILIDADE INDIFERENTE E INSTABILIDADE

Uma função Liapunov é definida por duas condições na vizinhança da origem: 1ª) $V(x)$ definida positiva; 2ª) $V'(x)$ definida negativa. Então o ponto de equilíbrio é assimptòticamente estável.

O facto de $V(x)$ ser definida positiva determina na origem um ponto fundo e no espaço de estado linhas de nível $V(x) = c$, com c positivo, de parâmetro c crescente em todas as direcções a partir da origem (envolvendo este ponto).

Sendo $V'(x)$ definida negativa, $V'(x) < 0$ em todos os pontos $x \neq 0$ da vizinhança da origem e portanto $V(x(t))$ decrescente sucessivamente no tempo, quer dizer, a trajectória $x(t)$ tende para a origem onde $V'(x) = 0$. Este processo caracteriza a estabilidade assimptótica.

Mas se $V'(x)$ é semi-definida negativa, então $V'(x) \leqslant 0$ na vizinhança da origem, havendo portanto pontos, além da origem, onde $V'(x) = 0$. Como $V(x(t))$ não pode crescer a trajectória $x(t)$ não se pode dirigir para as curvas de nível de maior parâmetro permanecendo então sobre a linha de nível correspondente ao início do movimento ou noutra inferior. Neste caso a origem é estável dizendo-se que se está em presença de *estabilidade fraca* (fig. 6-b), que preferimos referir por *estabilidade indiferente*, pois deslocando o sistema para qualquer dos pontos dessa linha de nível o sistema permanece em equilíbrio.

É evidente que se $V'(x)$ for definida positiva a origem, para a correspondente função $V(x)$, é instável. De facto as curvas de nível continuam a circundar a origem com parâmetros crescentes em todas as direcções mas $V'(x) > 0$ exteriormente a 0, quer dizer, $V(x(t))$ cresce no tempo, de modo que a trajectória $x(t)$ se dirige permanentemente para as linhas de nível com maior parâmetro, o que conduz à *instabilidade* da origem.

Todavia o facto de ser $V'(x)$ definida positiva significa também que a função arbitrada $V(x)$ não é uma função Liapunov. Por outro lado se a origem não for assimptòticamente estável não existe nenhuma função Liapunov. Conclui-se assim que a existência de uma função Liapunov é condição suficiente mas não necessária de estabilidade assimptótica. Por outras palavras: se não se encontrar uma função Liapunov não se pode afirmar a instabilidade.

8. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE

A discussão efectuada permite estabelecer um critério de verificação da estabilidade, que designaremos por *critério Liapunov* por se basear na formação de uma função Liapunov.

Num sistema autónomo de equação de estado $x' = f(x)$ com um ponto de equilíbrio na origem $x = 0$, se existir uma função $V(x)$ definida positiva e diferenciável numa vizinhança da origem onde

a) $V'(x)$ é definida negativa, o ponto de equilíbrio é *assimptòticamente estável* (fig. 6-a) e conforme a dimensão do domínio de

ingresso assim será assimptòticamente estável em pequeno, em grande ou em total (global).

b) V' (x) é semi-definida negativa, o ponto de equilíbrio é *fracamente estável* ou *de estabilidade indiferente* (fig. 6-b).

c) V' (x) é definida positiva, o ponto de equilíbrio *pode ser instável* (fig. 6-c).

Este critério é fàcilmente estendido a sistemas de tempo não invariante ou não estacionários com a equação de estado $x' = f(x, t)$.

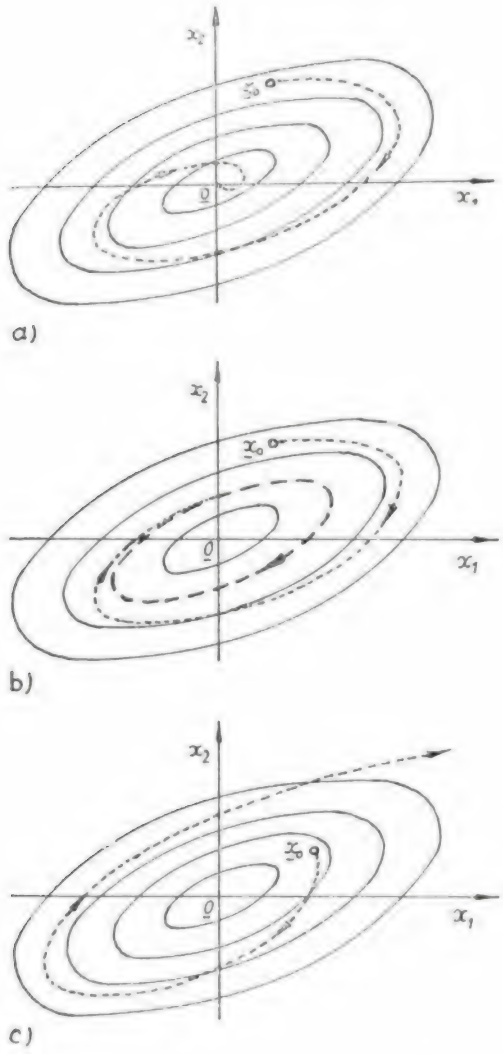


Fig 6 — Informação dada por uma função definida positiva V (x).

a) Estabilidade assimptótica (V' definida negativa).

b) Estabilidade indiferente (V' semi-negativa).

c) Possibilidade de instabilidade (V' definida positiva).

9. ESTABILIDADE ABSOLUTA NUM SECTOR

Considere-se um sistema de controle com um elemento não linear de característica $F(\sigma)$, excitado pela grandeza σ, e um elemento linear de característica $G(\sigma)$ em relação à variável σ (fig. 7-a).

As condições impostas pelo teorema Sylvester na definibilidade de V e V' definem um *sector de estabilidade* $[k_1, k_2]$ caracterizado genèricamente por $k_1 \leqslant F(\sigma)/\sigma \leqslant k_2$ contido no 1.º e no 3.º quadrantes do plano $(F(\sigma), \sigma)$ devendo todas as características do sistema estar contidas nesse sector e passando pela origem para que o ponto de equilíbrio seja assimptòticamente estável (fig. 7-b). Nestas condições define-se a *estabilidade absoluta* num sector.

Como é evidente o ângulo do sector depende da correspondente função V formada pelo que no caso de diferentes métodos de formação da função Liapunov conduzirem a funções V distintas também os respectivos sectores serão em geral diversos. Dado que a existência de uma função Liapunov é uma condição suficiente mas não necessária de estabilidade conclui-se que é válida a lei da sobreposição dos sectores, pois cada um corresponde a uma parte da zona completa de estabilidade.

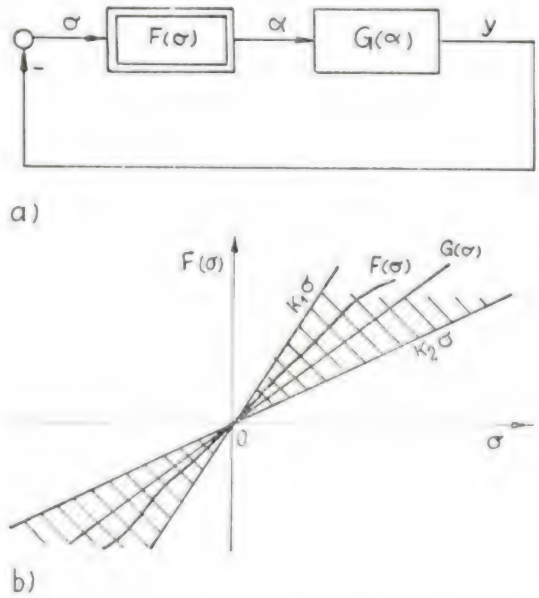


Fig. 7 — Estabilidade absoluta num sector de um sistema de controle.

a) Esquema de blocos.

b) Sector de estabilidade.

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

SIDERURGIA NACIONAL — Seixal — Vista aérea da Instalação de Laminagem (2.ª fase) — Grandes naves fabris (470 metros)

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL—INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

MINISTÉRIO DO ULTRAMAR — Direcção-Geral de Obras Públicas e Comunicações — Ilha do Fogo (Cabo Verde) — Obras Portuárias de Vale de Cavaleiros: Molhe Acostável, doca e varadouro.

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL–INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

10. EXEMPLO DE PROVA DA ESTABILIDADE

Para exemplificação dos conceitos discutidos considere-se um sistema constituído por três elementos: uma mola de constante k_1, de maneira a que a força exercida para um desvio x é, $F_1 = -k_1 x$ onde o sinal — significa fìsicamente

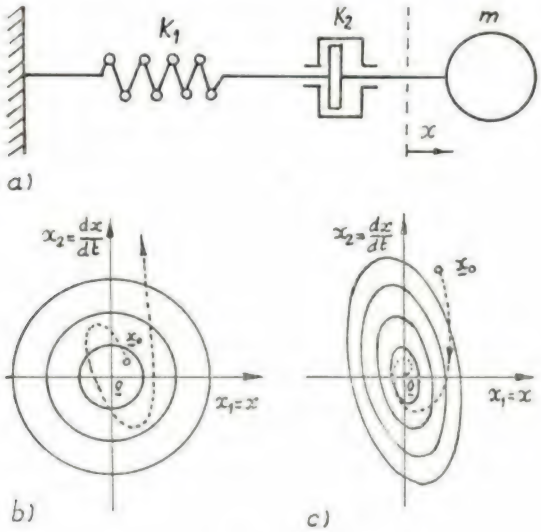


Fig. 8

oposição ao desvio, um amortecedor de constante k_2, sendo anàlogamente $F_2 = -k_2 x'$ e uma massa m (fig. 8-a).

10.1. Pelo método directo de Liapunov

Aplique-se o método directo, de Liapunov, a este sistema.

A equação do movimento do sistema será

$$m x'' = -k_1 x - k_2 x'$$

donde, pela introdução das variáveis de estado

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x'$$

se obtém a equação de estado

$$x_2' = -\frac{k_1}{m} x_1 - \frac{k_2}{m} x_2 .$$

O ponto de equilíbrio verifica-se portanto para $x_2 = 0$ ou seja para $x_1 = x_2 = 0$.

A energia do sistema é igual à soma da energia cinética com a energia potencial, sendo

$$E_c = \frac{1}{2} m x'^2 = \frac{1}{2} m x_2^2$$

e

$$E_p = \int_x^0 F_1 dx = \int_{x_1}^0 -k_1 x dx = \frac{k_1}{2} x_1^2$$

donde

$$E = \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{m}{2} x_2^2$$

função que é positiva em todo o espaço de estado R^2 e nula na origem (por outras palavras, E é uma função definida positiva).

Quando o sistema sofre um desvio da sua posição de equilíbrio a energia varia no tempo de acordo com a derivada

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

ou seja

$$E' = k_1 x_1 x_1' + m x_2 x_2'$$

e, pela definição de x_2 e com a equação de estado,

$$E' = k_1 x_1 x_2 + m x_2 \left(-\frac{k_1}{m} x_1 - \frac{k_2}{m} x_2 \right)$$

obtendo-se

$$E' = -k_2 x_2^2$$

quer dizer, a energia diminui constantemente em todo o espaço de estado tendendo o sistema necessàriamente para o repouso (note-se que E' é uma função definida negativa).

Conclui-se assim, sem resolver a equação de estado, que a origem é assimptòtica-globalmente estável.

Mas para sistemas mais complexos o método directo apresenta duas dificuldades: é difícil exprimir a energia e, se se consegue obter uma expressão, é difícil analisar a variação temporal da energia (muitas vezes não decresce monòtonamente).

10.2. Por uma função Liapunov (critério Liapunov)

O critério Liapunov de investigação da estabilidade consiste na determinação de uma função Liapunov.

O método directo sugere as variáveis de estado $x_1 = x$ e $x_2 = x_1'$ com $x_2' = -a_1 x_1 - a_2 x_2$ e a função $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ que deverá satisfazer às condições Liapunov. Mas, apesar da função $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ser definida positiva, a sua derivada $V'(x) = -2(a_1 - 1) x_1 x_2 - 2 a_2 x_2^2$ não é definida negativa nem semi-definida negativa. Resulta que a função arbitrada não prova a estabilidade do sistema. De facto as curvas de nível seriam circunferências centradas na origem e a trajectória intersectaria as linhas de nível de dentro para fora (fig. 8-b).

Admita-se porém $V(x) = q_{11} x_1^2 + 2 q_{12} x_1 x_2 + q_{22} x_2^2$ de coeficientes indeterminados, definindo uma família de elipses como linhas de nível, função que deve ser definida positiva. Calculem-se de acordo com o teorema Sylvester, os coeficientes q_{11}, q_{12} e q_{22} de modo a que $V'(x) = -x_1^2 - x_2^2$, portanto definida negativa. Os valores dos coeficientes assim calculados verificam realmente as condições impostas pelo teorema Sylvester à função $V(x)$ e portanto $V(x)$ constituiu uma função Liapunov, concluindo-se a estabilidade assimptótica do sistema.

Na verdade é fácil verificar pela derivação de $V(x)$ e identificação com $V'(x) = -x_1^2 - x_2^2$ que deverá ser

$$q_{12} = \frac{1}{2 a_1}$$

$$q_{22} = \frac{1 + a_1}{2 a_1 a_2}$$

$$q_{11} = \frac{a_2^2 + a_1 (1 + a_1)}{2 a_1 a_2}$$

valores que verificam as condições dadas pelo teorema Sylvester à função $V(x)$

$$q_{11} > 0$$

$$q_{11} q_{22} - q_{12}^2 > 0$$

pois por substituição de valores em $q_{11} q_{22} - q_{12}^2 > 0$ se deduz que terá de ser $a_1 > 0$ o que conduz à verificação de $q_{11} > 0$ quando $a_2 > 0$.

11. FORMAÇÃO DE FUNÇÕES LIAPUNOV

O problema da estabilidade segundo o critério Liapunov depende da obtenção de uma função Liapunov, nomeadamente de uma «boa» função Liapunov, que determine o maior domínio de ingresso possível.

Não existe porém nenhum método geral que conduza à sua formação no caso de sistemas não lineares. Nos casos práticos dos sistemas de controle existem vários métodos de entre os quais se apresentam algumas ideias basilares.

11.1. Método em sistemas lineares

Num sistema linear, traduzido pela equação de dinâmica $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante (independente de $\mathbf{x}$), considere-se uma forma quadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\,\mathbf{x}$ positiva para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz simétrica real definida positiva, sendo portanto $V'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'^T \mathbf{Q}\,\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\,\mathbf{x}'$. Como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T$ será $V'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{A})\,\mathbf{x}$, donde $V'(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{P}\,\mathbf{x}$ com $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{A} = -\mathbf{P}$. Deste modo se $\mathbf{P}$ for definida positiva será $V'(\mathbf{x})$ definida negativa, quer dizer, o sistema é estável.

O problema resume-se pois a calcular os coeficientes q_{ik} da matriz $\mathbf{Q}$ através de $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{A} = -\mathbf{P}$, tendo-se feito $\mathbf{P}$ definida positiva, o que permite formar uma função Liapunov através de $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\,\mathbf{x}$.

Com este raciocínio o *critério de estabilidade em sistemas lineares* pode enunciar-se: É condição necessária e suficiente para que um sistema linear de equação dinâmica $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ seja estável que para uma dada matriz simétrica definida positiva (real) $\mathbf{P}$ exista uma matriz simétrica definida $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{A} = -\mathbf{P}$.

Como $V(\mathbf{x})$ resulta uma função Liapunov é evidente que a condição é suficiente. Pode-se também demonstrar que é condição necessária.

11.2. Método aproximado em sistemas linearizados

No caso de sistemas não lineares a matriz $\mathbf{A}$ da equação dinâmica $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$ deixa de ser constante, dependendo pelo menos um dos seus elementos a_{ik} do vector de estado $\mathbf{x}$.

Esta matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ pode contudo decompor-se em duas sub-matrizes, $\mathbf{A}_L$ constante e $\mathbf{A}_R(\mathbf{x})$ dependente de $\mathbf{x}$, de modo que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_R(\mathbf{x})$, sendo portanto $\mathbf{x}' = \mathbf{A}_L\,\mathbf{x} + \mathbf{A}_R(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$ que define a linearização em torno da origem se $\mathbf{A}_R(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Esta condição não é indispensável para se definir um método aproximado.

Partindo da forma quadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, com os coeficientes indeterminados, será $V'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ com $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}$ que se pode decompor em duas partes, uma matriz P_L constante e outra $\mathbf{P}_R(\mathbf{x})$ dependente de $\mathbf{x}$, tal que $P(\mathbf{x}) = P_L + \mathbf{P}_R(\mathbf{x})$, sendo por conseguinte $\mathbf{P}_L = \mathbf{A}_L^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_L$ e $\mathbf{P}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_R^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_R(\mathbf{x})$. Fazendo $\mathbf{P}_L = -\mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz unidade, pode calcular-se $\mathbf{Q}$ através de $\mathbf{A}_L^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_L = -\mathbf{I}$ pois esta equação é resolúvel em $\mathbf{Q}$ desde que a matriz $\mathbf{A}_L$ tenha apenas valores próprios (raízes do determinante $\det(\mathbf{A}_L - \lambda \mathbf{I} = 0)$ com parte real negativa, isto é, sempre que a matriz $\mathbf{A}_L$ corresponda a um sistema linear estável. Nestas condições a forma quadrática $V = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ é definida positiva.

Por outro lado $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = -\mathbf{I} + \mathbf{P}_R(\mathbf{x})$ ou $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = -\mathbf{I} + \mathbf{A}_R^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_R(\mathbf{x})$ corresponde à forma quadrática $V' = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ pelo que por meio do teorema de Sylvester se pode calcular o domínio onde V' é definida negativa.

Note-se que na medida em que $\mathbf{A}_R(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ quando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ também $\mathbf{P}_R(\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ e portanto na vizinhança da origem $\mathbf{0}$ é $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \simeq -\mathbf{I}$ isto é, $V'(\mathbf{x}) \simeq -\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x}$ ou seja ainda $V'(\mathbf{x}) \simeq x_1^2 + \ldots + x_n^2$ donde se vê que V' é definida negativa na vizinhança da origem $\mathbf{0}$.

11.3. Método de Aiserman

Baseado nas considerações anteriormente expostas Aiserman [3] substituiu a característica do elemento não linear do sistema em estudo por uma característica linear aproximada, o que pelo critério da estabilidade dos sistemas lineares permite determinar os coeficientes q_{ik} da matriz $\mathbf{Q}$ e portanto definir uma função V que se toma como função Liapunov do sistema pela introdução da característica não linear.

11.4. Método de Szego

O modo como Szego [4] restringiu a função V' conduziu a supor que na função V os coeficientes q_{ik} são funções apenas de x_i e x_k, quer dizer, $q_{ik}(x_i, x_k)$ e não $q_{ik}(\mathbf{x})$. Os coeficientes a_{ik} sendo considerados polinómios em x_i e x_k, não são função de x_n, pelo que V' é sempre uma equação algébrica do 2.° grau em x_n e portanto a equação $V' = 0$ pode ser resolvida em x_n pela forma quadrática. A resolução desta equação define duas superfícies no espaço de estado mudando o sinal de V' quando estas superfícies se cruzam, quer dizer, entre as duas superfícies os pontos do espaço são caracterizados por exemplo por $V' < 0$, e nos pontos da zona exterior às superfícies por $V' > 0$, sendo evidentemente sobre elas $V' = 0$ (fig. 9). Se se força estas duas superfícies a serem coincidentes, V' não mudará de sinal em todo o espaço de estado e estabelecem-se as condições de Liapunov.

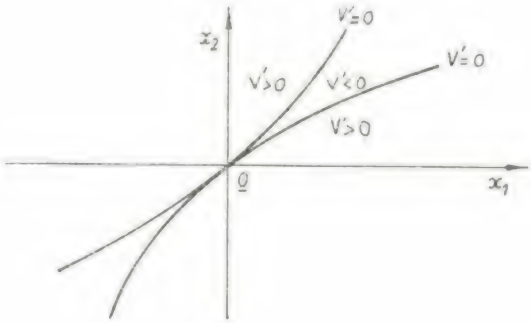


Fig. 9 — Método de Szego no espaço R^2.

11.5. Método de Schultz e Gibson

No método de Aiserman partindo-se da forma quadrática V com coeficientes indeterminados calcula-se o vector grad V, que permite formar $V' = \mathbf{f}^T$ grad V e determinar os coeficientes de maneira a que V seja definida positiva. O método de Schultz e Gibson, designado método de gradiante variável [5], procede inversamente: parte do vector grad V, cujas componentes são formalmente lineares de coeficientes indeterminados, escolhendo-se os coeficientes q_{ik} de tal modo que V seja definida positiva e V' definida negativa ou semi-definida negativa.

Em geral este método é mais fácil de aplicar nos casos práticos do controle automático, dependendo contudo da escolha dos coeficientes q_{ik}, que no método de Aiserman se fixam pelo desenvolvimento do cálculo.

Assim se no sistema de equação $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{f})$ com $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ existe, numa vizinhança da origem, um vector real grad V diferente de zero excepto na origem tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$

e se V′ for definida negativa com $V = \int_0^x \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n \right)$ definida positiva, o sistema é assimptòticamente estável nessa vizinhança da origem.

O método do gradiente variável procede similarmente ao método de Szego dando contudo maior âmbito à função V através da introdução de integração na sua determinação.

11.6. Método de Lurie

Lurie e Letov admitiram um integral na definição de V, «forma quadrática mais um integral sobre a não linearidade», incluindo assim em V um maior número de termos, o que dá a q_{ik} maior generalidade. A dificuldade resultante deste maior âmbito consiste nas restrições de V′ para que seja pelo menos semi-definida negativa.

Decompondo o elemento linear [6], equivalente a todos os elementos lineares do sistema, em partes caracterizadas por c_k e α_k (fig. 10), que definem respectivamente o vector $\mathbf{c}$ e a matriz Λ com os valores próprios $\lambda_i = \alpha_i$, a equação dinâmica do elemento linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ será representada por $\mathbf{x}' = \Lambda\,\mathbf{x}$ e portanto, considerando a característica $f(\sigma)$ do elemento não linear, a equação dinâmica do sistema resulta $\mathbf{x}' = \Lambda\,\mathbf{x} + \mathbf{e}\,f(\sigma)$, sendo $\mathbf{e}$ um vector unitário.

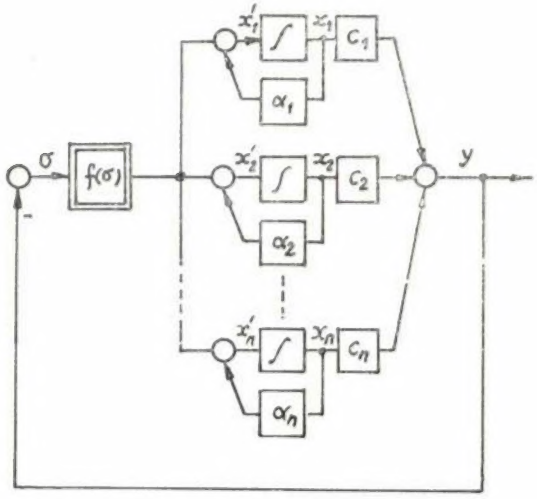


Fig. 10

Pelo diagrama de blocos $\sigma = -y$ com $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ou seja $\sigma = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ donde se deduz

$$\sigma' = \mathbf{b}^T\mathbf{x} - r\,f(\sigma) \text{ com } \mathbf{b}^T = -\mathbf{c}^T\Lambda$$

e $$r = \mathbf{c}^T\mathbf{e} = \sum_i c_i .$$

Lurie parte da função

$$V = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{q_i q_k x_i x_k}{\lambda_i + \lambda_k} + \int_0^{\sigma} f(z)\,dz,$$

que é definida positiva quando o integral for positivo, isto é, para $f(\sigma)/\sigma > \varepsilon > 0$, ou seja, se a característica do sistema não linear está no 1.º e 3.º quadrantes do plano $(f(\sigma), \sigma)$. Para que a parte linear do sistema seja estável admite-se que a parte real de λ_i é negativa. Nestas circunstâncias deduz-se

$$V' = -r\,f^2(\sigma) - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)^2 + f(\sigma)\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(b_i - 2\,q_i \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\lambda_i\,\lambda_k}\right)$$

que será definida negativa quando $r > 0$ e $b_i = 2\,q_i \sum_{k=i}^{n} \frac{q_k}{\lambda_i\,\lambda_k}$ pois se anula a única parcela positiva de V′. Satisfeitas estas condições para $i = 1, 2, \ldots, n$ o sistema é assimptòticamente estável.

11.7. Método de Krasovski

Seja um sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ com o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ e em que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ admite derivadas parciais em ordem a x_i (com $i = 1, 2, \ldots, n$). Considerando a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right]$, se a matriz simétrica $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ for definida negativa (condição suficiente) o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável e $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é uma função Liapunov. Se além disso $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ então o ponto de equilíbrio é assimptótica-globalmente estável [7].

12. CONCLUSÕES

Tendo-se apresentado um exame exaustivo dos tipos de estabilidade possíveis para um sistema definiu-se o critério de estabilidade pela definição de uma função Liapunov. O problema reduziu-se à determinação desta função, tendo-se discutido vários métodos de formação.

HERÓIS DA LUBRIFICAÇÃO

Merelim

Há uns 1400 anos, mais coisa menos coisa, um sujeito que respondia ao nome de Artur arrancou uma espada de uma pedra e, assim, sem mais nem menos, tornou-se Rei de Inglaterra. Mas quem lhe facilitou a tarefa, não foi outro senão um mágico da côrte que se chamava Merelim.

No século VI, a Inglaterra lutava com uma grande falta de reis. Por isso, alguém se lembrou de criar um teste de perícia que consistia na aparentemente estranha operação de retirar uma espada de uma bigorna, assente sobre uma grande pedra. O anúncio publicado rezava assim:

Merelim

«Quem conseguir arrancar esta espada
será proclamado Rei de Inglaterra!»

As tentativas que diàriamente faziam os nobres candidatos ao trono vago redundavam em fracasso.

Artur, o nosso homem, que fazia uns biscates por aqui e por ali, ansioso que estava — coitado! — de arranjar um lugar com mais futuro e maiores possibilidades, consultou o seu amigo Merelim, mágico da côrte.

Merelim estudou a situação e meteu mãos à obra. Tudo ele tentou para conseguir resultados positivos: os triviais passes de magia, os pòzinhos de perlimplim e, até, algumas maldições bastante fortes, diga-se. Mas a espada não se mexia.

Ao cabo de tantas e tão infrutíferas tentativas, Merelim disse: «O problema consiste na lubrificação e a minha magia não resulta. Só com ensaios de laboratório poderemos chegar a uma conclusão qualquer».

«Mas a minha prova é daqui a dois dias!», protestou aflito, o nosso Artur. «Não temos tempo para isso».

Merelim, contudo, informou-o de que o seu fornecedor de lubrificantes tinha laboratórios espalhados por todo o mundo e que a resposta desejada poderia ser obtida muito depressa.

Se assim o pensou, melhor o fez. Sem perda de um minuto, o problema foi entregue ao laboratório da MOBIL, que tinha instalações no próprio bairro.

Os técnicos iniciaram imediatamente os ensaios que se impunham. Ao cair da noite, tinham chegado a uma conclusão positiva: uma mistura especial de óleo de asas de morcego e de gordura de escorpião, mistura esta que faria deslizar a mais pesada das espadas que estivesse entalada na mais teimosa das pedras.

Graças à rapidez dos serviços laboratoriais da MOBIL e à oportunidade com que Merelim, um mago que soube reduzir-se à sua modéstia, desistindo da magia quando ela não servia, aplicou a massa lubrificante «TESE» (Tira Espadas Sem Espinhas) da MOBIL, Artur conseguiu o emprego que pretendia: reinar.

Os clientes de hoje também confiam na MOBIL para os lubrificantes e serviços de que necessitam.

A MOBIL dispõe de laboratórios espalhados por todo o mundo. Isto significa que há sempre um laboratório perto de qualquer problema de lubrificação, um laboratório equipado para o resolver pelo método mais rápido e seguro.

Este é mais um dos serviços específicos que se traduzem por lubrificações excepcionais à disposição dos compradores dos nossos produtos.

Não é magia. É MOBIL!

Mobil

LITO PROGRESSOR

a) O método directo de Liapunov prova a estabilidade sem se resolver a equação diferencial de estado de sistema, sendo encarado como um caso particular do critério de estabilidade.

b) O critério Liapunov permite avaliar a estabilidade de um modo não unívoco, pois em princípio pode construir-se uma infinidade de funções Liapunov (as condições de estabilidade do critério são apenas suficientes e não necessárias).

c) O domínio de ingresso na estabilidade em grande depende da função V (x), sendo difícil a formação da função Liapunov mais adequada.

d) Para sistemas até 3.ª ordem é possível uma interpretação geométrica, e para sistemas de ordem superior é muito difícil a formação de funções Liapunov.

e) Existem diversos métodos para formar funções Liapunov mas nenhum ideal.

Na prática dos sistemas de controle o critério Liapunov perdeu parte do seu interesse, e portanto todos os métodos discutidos de formação de funções Liapunov com o critério de Popov, baseado na função de frequência modificada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] A. M. LIAPUNOV: Stability of Motion; Academic Press, New York (1967).

[2] H. DUARTE-RAMOS: Descrição de sistemas nos domínios do tempo, imagem e complexo através do regime de transferência e do estado dinâmico; Técnica, 404, (1971), p. 181-192

[3] H. A. AISERMAN, F. R. GANTMACHER: Die absolute Stabilitaet von Regelsystemen; Oldenbourg Verlag, Munique (1965).

[4] G. P. SZEGO: A Contribuition to Liapunov's Second Method: non linear autonomous systems, in «International Symposium in Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics», Academic Press, New York (1963).

[5] D. G. SCHULTZ, J. E. GIBSON: The Variable Gradient Method for Generating Liapunov Functions; Trans. AIEE Pt II 81 (1962) p 203-210.

[6] A. I. LURJE: Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbstaetigen Regelung; Akademie-Verlag, Berlin (1957).

[7] K. OGATA: State Space Analysis of Control Systems; Prentice-Hall, (1967).